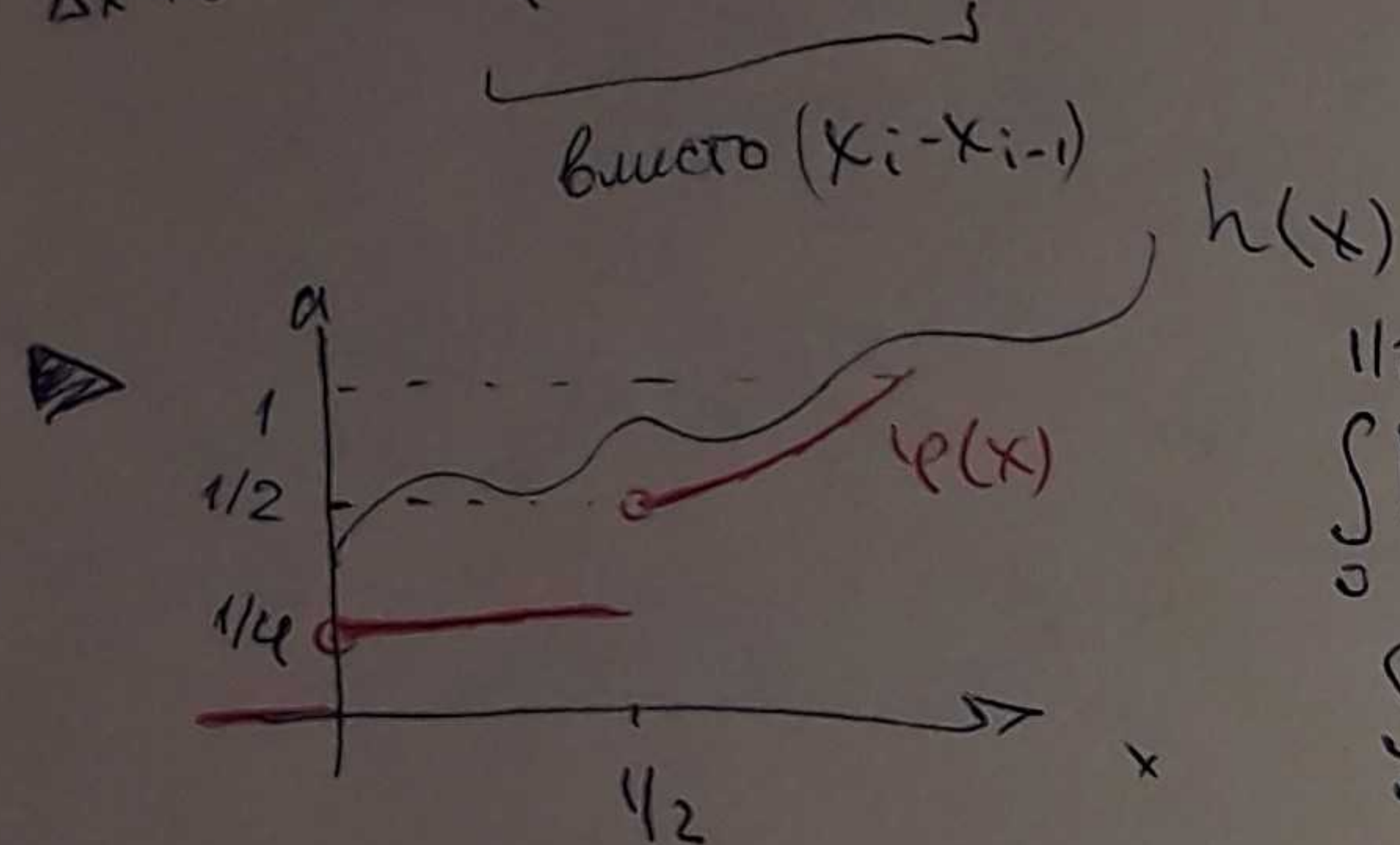
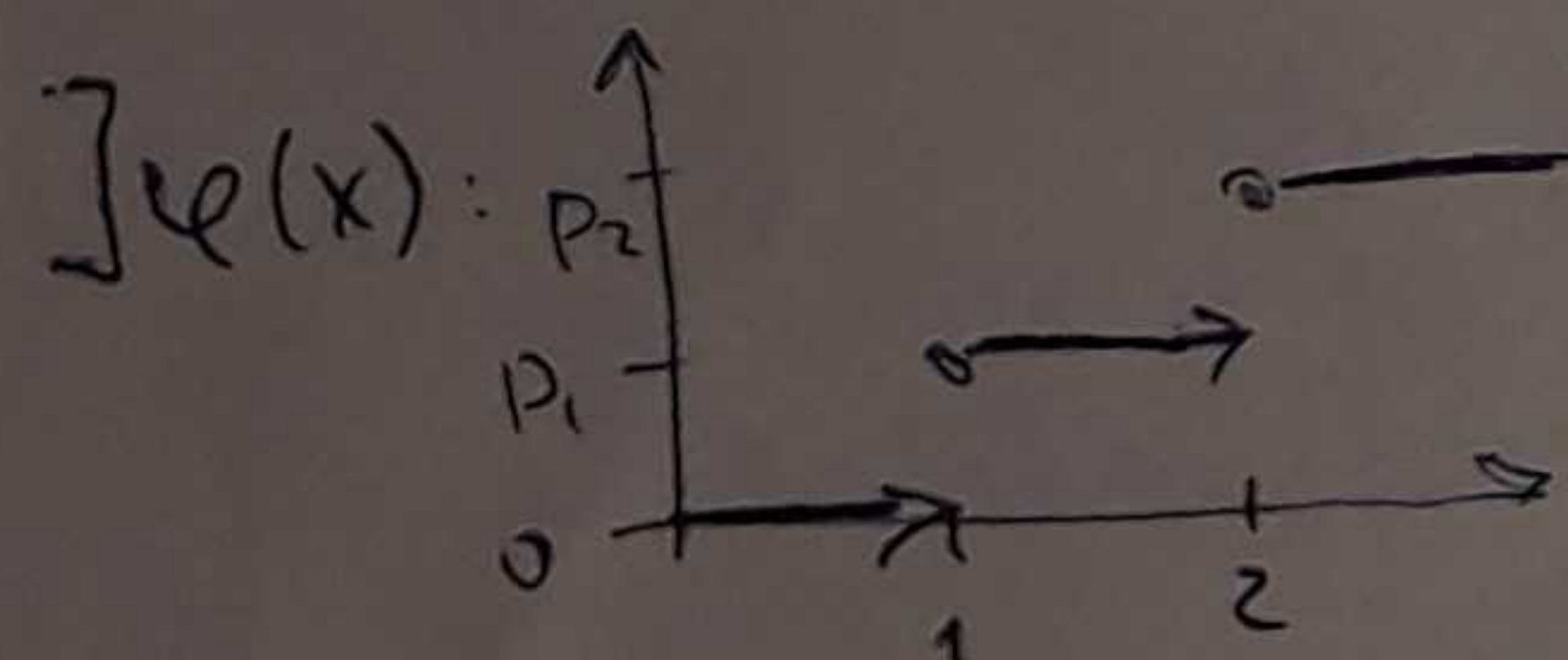


$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} h(\xi_i) (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$ - интеграл Стильеса; позволяет объединить кусочно-непрерывные ф-ции в единый конструкт.



$$\int_0^{1/2} h(x) d\varphi(x) = \frac{1}{4} h(0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) h(1/2);$$

$$\int_{1/2}^1 h(x) \varphi'(x) dx.$$



Тогда $\int h(x) d\varphi(x) = p_1 h(1) + p_2 h(2)$

Если $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $F(p, j) = \int F(x, j) d\varphi(x) = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j}$;

и в таком случае $A(p, q)$ будет двойной суммой

Пусть ось x -ча, разделим по бокам вер-тели;

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j.$$

$A(i, q) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$; $A(p, j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i$.

В таком случае, $A(p, q) = \sum_{i=1}^m A(i, q) p_i = \sum_{j=1}^n A(p, j) q_j$.

10.09.20

Теория
мат

► $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $A(p, q) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = p_1(a_{11}q_1 + a_{12}q_2) + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2$.
 Как можно видеть, $A(p, q)$ при фикс. q является линейной по p_1 (а она и вторгая, и третья)

Упр-е 3.3

$$\langle p^\circ, q^\circ, v \rangle = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2), 0); \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Надо показать, что $A(p, q^\circ) \leq v \leq A(p^\circ, q) \quad \forall p \in P, q \in Q$.

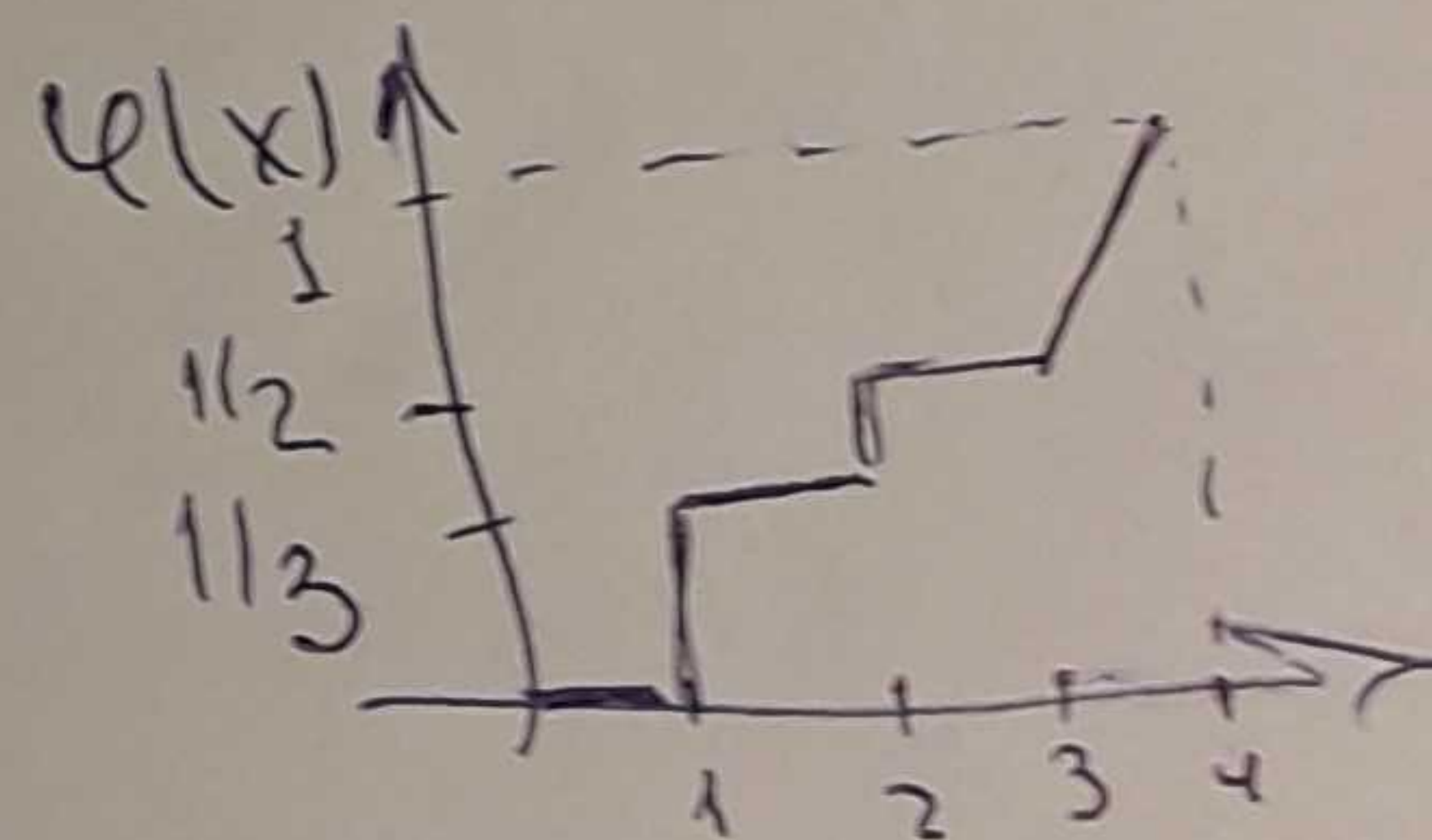
$$A(p, q^\circ) \leq A(p^\circ, q^\circ) \leq A(p^\circ, q) \quad \forall p, q?$$

$$A(p, q^\circ) = -p_1/2 + p_1/2 + p_2/2 - p_2/2 = 0. \text{ Аналогично для } A(p^\circ, q)$$

$\forall p$ выполняется.

Упр-е 3.5

$$F(x, y) = x - y; \quad \varphi(x) = 1/3 I_1 + 1/6 I_2 + \begin{cases} 1/2(x-3); & 3 \leq x \leq 4 \\ 1/2 & ; x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$$



$$F(\varphi, y) = \int_x F(x, y) d\varphi(x) = \frac{1}{3} F(1, y) + \frac{1}{6} F(2, y) + \int_3^4 \frac{1}{2} F(x, y) dx =$$

$$= \frac{1}{3}(1-y) + \frac{1}{6}(2-y) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_3^4 - xy \Big|_3^4 \right) =$$

$$= \frac{1}{3}(1-y) + \frac{1}{6}(2-y) + \frac{7}{24} - y/2 = \dots = \frac{29}{12} - y.$$

$$\text{Но верно } F(\varphi, y) = \int_x x d\varphi(x) - \int_x y d\varphi(x)$$

$\underbrace{\int_x y d\varphi(x)}_{y \int_x d\varphi(x)} - \text{по линейности интеграла по } y$
 $\Rightarrow$ это равно $y \cdot 1 = y$.

Задача 4.2

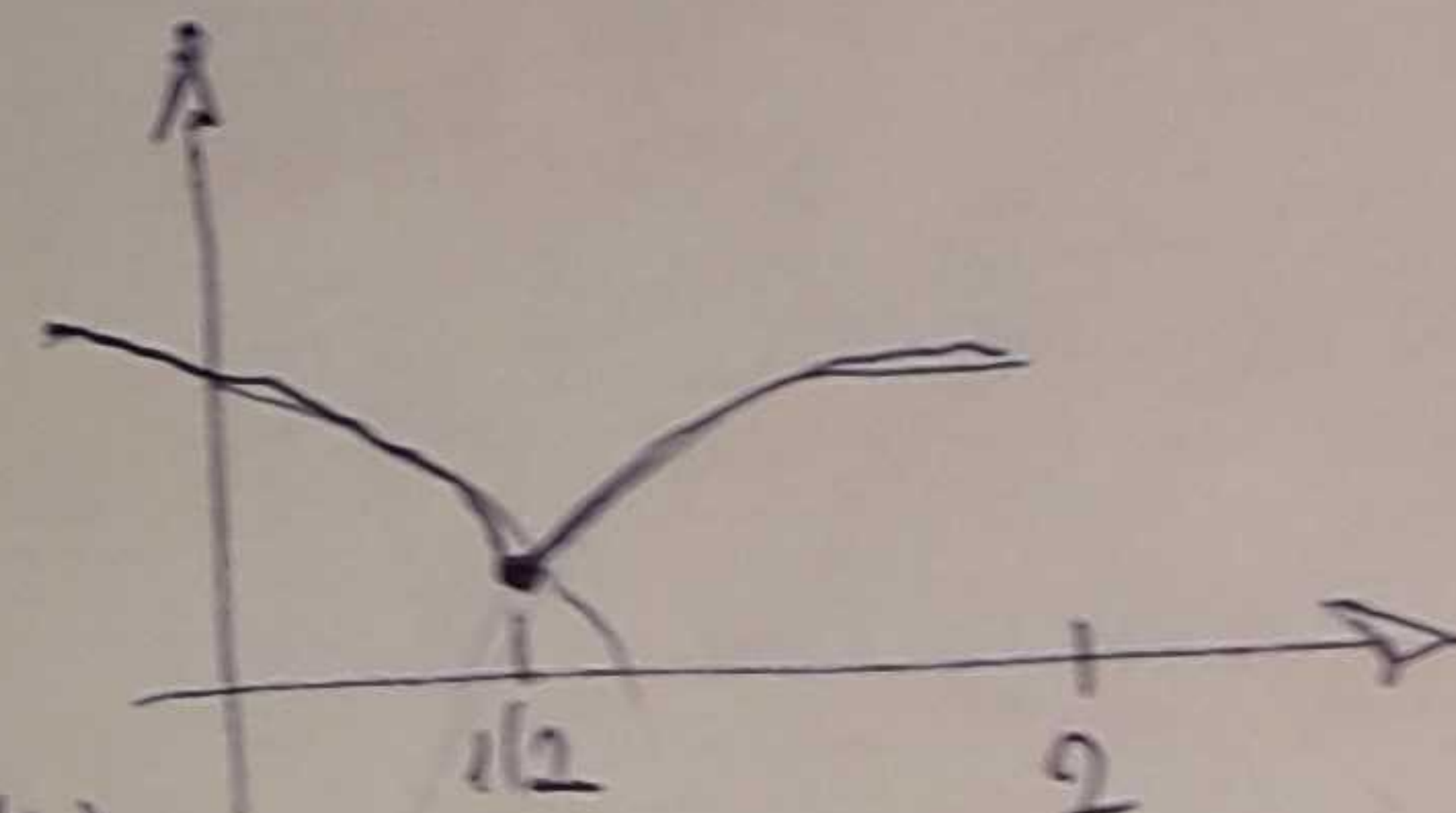
$$F(x, y) = \begin{cases} -(x+1)^2 + y^2 + 4y + 2, & x < y \\ -(x-2)^2 + y^2 - 2y + 5, & x \geq y \end{cases}, \quad X, Y = [0, 1]$$

$$\psi^0(x) = \frac{1}{6}I_0 + \frac{5}{6}I_1; \quad y^0 = \frac{1}{2}; \quad v = \frac{13}{4}$$

$$\psi^0 = I_{1/2}$$

Надо показать, что $F(\psi^0, y) \geq v \quad \forall y$;
 ~~$F(x, y^0) \leq v \quad \forall x$~~

$$F(x, 1/2) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1/4 + 2 + 2; & x < 1/2 \\ -(x-2)^2 + 1/4 - 1 + 5; & x \geq 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(x+1)^2 + 17/4; & x < 1/2 \\ -(x-2)^2 + 17/4; & x \geq 1/2 \end{cases}$$



$$\max_x F(x, 1/2) = F(0, 1/2) = \frac{13}{4}; \quad F(1, 1/2) = \frac{13}{4} \text{ as well. T.o. } F(x, y^0) = F(x, 1/2) \leq \frac{13}{4}.$$

$$\text{Второе шр-во: } F(\psi^0, y) = \frac{1}{6}F(0, y) + \frac{5}{6}F(1, y) = \frac{1}{6}[-(x+1)^2 + y^2 + 4y + 2] \Big|_{x=0} + \frac{5}{6}[-(x-2)^2 + y^2 - 2y + 5] \Big|_{x=1} =$$

раз $y \in [0, 1]$,
 то будет только
 первая из интервалов
 где F .

$$= \frac{1}{6} y^2 - y + \frac{7}{2}$$

Положим $y_0 = 1/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{13}{4}$$

► $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - пример матрицы, где второй перек имеет выравнивающую, но не оптимальную аннотацию строения.

$$q^0 = (1/2, 1/2, 0); \quad q^* = (0, 0, 1); \quad A(1, q^0) = 1; \quad A(2, q^0) = 1.$$

Еще подходит $q^{**} = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Пример 4.3

Доминирование;
графиковый метод

17.09.20
Теория игр

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}$$

Выравнивающие стр-ии:

$$p^0: A(p^0, j) = 5 \quad \forall j;$$

$$q^0: A(i, q^0) = 5 \quad \forall i.$$

Четвертое уравнение в системах возникло как $\sum p_i = 1$ или $\sum q_i = 1$.
Имеем две системы переходов:

$$\begin{cases} q_1 + a q_2 = 5; \\ a q_1 + q_2 + a q_3 = 5; \\ a q_2 + q_3 = 5; \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} q_1 = q_3; \\ q_2 = 1 - 2q_1; \\ q_1 + a(1 - 2q_1) = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1-a}{3-4a}; \\ q_2 = \frac{1-2a}{3-4a}; \\ q_3 = \frac{1-a}{3-4a}. \end{cases}$$

Они равны в сумме 1.
Принадлежность q_1, q_2, q_3
ин-ву Q подтвердится
неотрицательностью первых.
Это достигается при
 $a \leq 1/2$.

Т.о., при $a \leq 1/2$ имеется выравнивающая
стратегия второго игрока. С-ма относительно p имеет аналогичный
вид. Ито, если $a \in (1/2, 1)$? Оптимальными стратегиями будут
чистые: $p^0 = (0, 1, 0)$; $q^0 = (1/2, 0, 1/2)$. Почему именно такой p ? Пока не
скажем.

$$\begin{aligned} j=1: & a=5; \\ j=2: & 1 \geq 5; \\ j=3: & a=5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i=1: & 1/2 < 5; \\ i=2: & a=5; \\ i=3: & 1/2 < 5. \end{aligned}$$

Пример выравнивающей стратегии для непрерывной игры. Если g -член
выигрышей константная, любая стратегия будет выравнивающей. Но
это - совсем вырожденный случай. Как другой пример,

$$F(x, y) = xy; \quad X \times Y = [-1, 1] \times [-1, 1] \quad - \text{чисто: } F(0, y) = 0; F(x, 0) = 0.$$

! Значение макс. игры Γ можно представить в виде двух формул:

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \bar{v}$$

Упр-ие 4.6

Док-то, что:

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \leq v \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \bar{v}. \text{ Используя индикаторы}$$

Цену равны $\underline{v}, \bar{v}$ в ситуации расширения Γ' игры Γ ? Они совпадают и равны v . Мы говорили, что значение всегда имеет для игры в смешанных стратегиях.

В случае матричных игр точка будет лежать в строке i , или там соотв. $p_i > 0$.

(Св-во дополняющей нежесткости)

$\exists (\varphi^0, \psi^0, v)$ - р-е в смеш. стратегиях макс. игры Γ . Тогда:

$$1). x \in Sp(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \varphi^0) = v;$$

$$2). y \in Sp(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = v.$$

(отрицание v)
Как следствие, $F(x, \varphi^0) < v \Rightarrow x \notin Sp(\varphi^0);$
 $F(\varphi^0, y) > v \Rightarrow y \notin Sp(\psi^0).$

$\sim$ " " (для матричных игр)

$\exists (p^0, q^0, v)$ - р-е в смеш. стратегиях игры с м-цей A . Тогда:

$$1). p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v;$$

$$2). q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = v.$$

и аналогичное следствие.

Пример 4.4

$A = \text{diag}(a_{ii} > 0)$. Допустим, все компоненты оптимальных стратегий p^0, q^0 положительны.

Тогда $A(i, q^0) = a_{ii} q_i^0 \dots$ (если в матрицах).

Интерпретация: один человек ищет, другой — прячется.

a_i — верто того, что прячущийся найдет в i -ом месте. Оптимальная стратегия для прячущегося — выбрать обратно пропорциональному образом: прячется там, где меньше вероятностей.

Пример 5.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

доминирует
средний из
строк 1, 2

строка
доминирует
или $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

В оставшейся игре $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ равновесие будет $p^0 = (1/2, 1/2)$, $q^0 = (1/2, 1/2)$, $v = 2$.

Если посмотреть на:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ то } p^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \text{ явл-ся оптимальной}$$

Когда вытерли третью строку по критерию доминирования, терять ничего.

Пример 5.1.а

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ср. ариф. 1 и 2 стр.

строка

строка

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$: третий столбец доминирует?

К упр-ю 5.1

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

не строго по отношению к $2^{\text{ой}}$

Упр-е 5.2 (про покериста Блэлла)

Выпишем игру карты:

$k_1, k_2 \backslash l_1, l_2$	(2,0)	(1,1)	(0,2)
(3,0)	1	2	3
(2,1)	1	1	2
(1,2)	2	1	1
(0,3)	3	2	1

Вопрос: $\max(k_1 - l_1, 0) + \max(k_2 - l_2, 0)$.

x } доминируются крайними.

$$p^0 = (1/2, 0, 0, 1/2);$$

Стратегии такого
вида будут
называться
крайними

q_1 - выравн.- $(1/2, 0, 1/2)$; $\Rightarrow$ оптималь.

$q_2 = (1/4, 1/2, 1/4)$; - не явл. оптималь.

$$q_3 = (0, 1, 0)$$

Обобщая, можно сказать, $q^2 = (\alpha, 1-2\alpha, \alpha)$;
 $\alpha \in [0, 1/2]$.

$$q_2 = \frac{q_1 + q_3}{2}$$

Пример 5.2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} : p_1$$

$$l_1(p_1) = -1 \cdot p_1 + 2(1-p_1) = 2 - 3p_1; \text{ аналогично:}$$

$$l_2(p_1) = -2p_1 + 4(1-p_1) = 4 - 6p_1;$$

$$l_3(p_1) = 3p_1 + 1 - p_1 = 2p_1 + 1.$$

Итак, пересечение должно на 1^{st} и 3^{rd}
прямых. Тогда где q_1 будет выр-
та q^* , $q_2 = 0$, $q_3 = 1 - q^*$.

Ищем:

$$\begin{cases} -q^* + 3(1-q^*) = 5; \\ 2q^* + (1-q^*) = 5. \end{cases}$$

$$p^0 = (2/5, 0, 3/5)$$

$$p^0 = (1/5, 1/5)$$

$$\Rightarrow v = 7/5$$

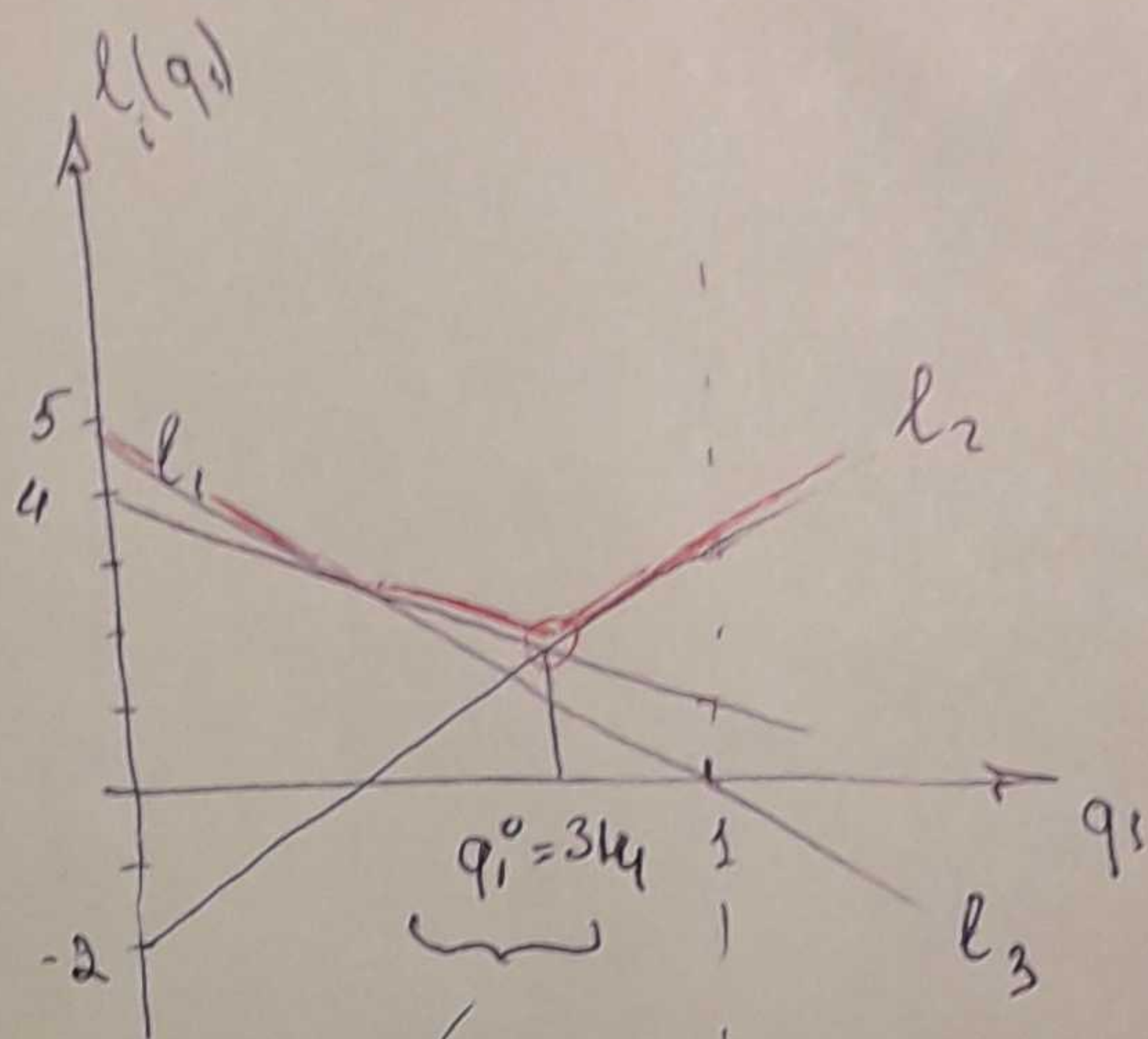
Упр-е 5.3

Найти рун-е в смеш. стратегиях:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$q_1, (1-q_1)$

$$\begin{aligned} l_1 &= 4 - 3q_1; \\ l_2 &= -2 + 5q_1; \\ l_3 &= 5 - 5q_1. \end{aligned}$$



Берём 1 и 2-ю строки:

$$\begin{cases} p_1 + 3(1-p_1) = v \\ 4p_1 - 2(1-p_1) = v \end{cases}$$

$$p_1 = 5/8$$

↓

$$p^0 = (5/8, 3/8, 0);$$

$$v = 7/4.$$

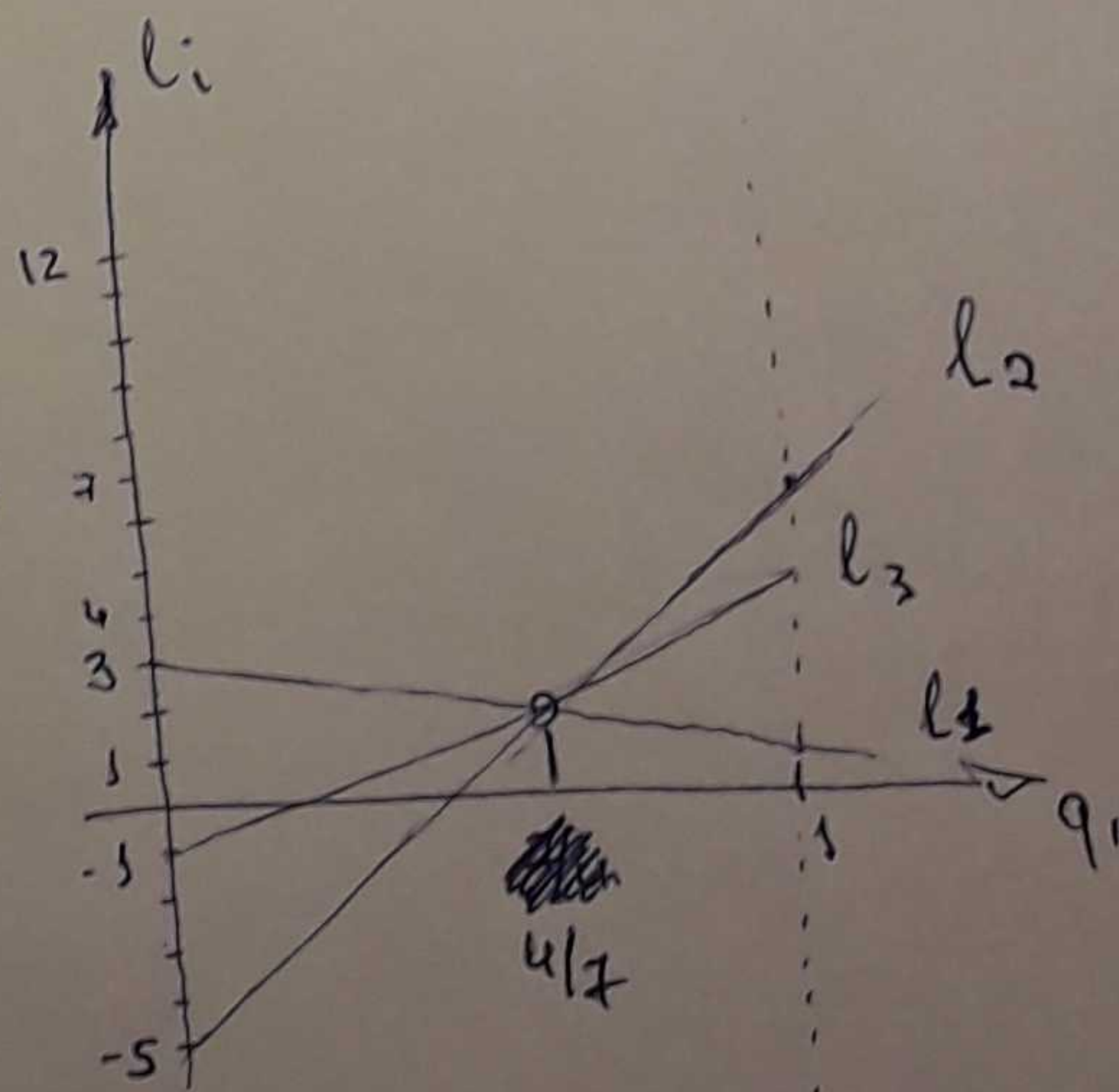
$$\begin{aligned} l_1 &= l_2: \\ 4 - 3q_1 &= -2 + 5q_1 \\ q_1 &= 3/4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q^0 = (3/4, 1/4)$$

Пример 5.3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_1(q_1) &= 3 - 2q_1; \\ l_2(q_1) &= -5 + 12q_1; \\ l_3(q_1) &= -1 + 5q_1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} l_1 &= l_2: \\ 3 - 2q_1 &= -5 + 12q_1 \\ 8 &= 14q_1 \Rightarrow q_1 = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= l_3: \\ -5 + 12q_1 &= -1 + 5q_1 \\ -4 &= -7q_1 \Rightarrow q_1 = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$q^0 = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Возьмём 1 и 2-ю строку:

$$\begin{cases} p_1 + 7(1-p_1) = v; \\ 3p_1 - 5(1-p_1) = v. \end{cases}$$

$$7 - 6p_1 = 8p_1 - 5 \Rightarrow 14p_1 = 12$$

$$p_1 = \frac{6}{7} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$$

$$v = \frac{13}{7}.$$

Ещё есть возможность $p^0 = (5/7, 0, 2/7)$, но вот графы l_2 и l_3

не пересекаются (там разные производные графов.)

Упр-е 5.7

Решение 3x4 и 3x3
расширением;
иной брага.

24.09.20

Теория игр

Пример 2x2. и-чм A , для к-рой упр-е (5.3) не имеет р-ня.

q_1, q_2, v

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sum_{l=1}^k p_{il}^0 a_{iljt} = v; \quad t=1, \dots, k;$$

$$\sum_{l=1}^k p_{il}^0 = 1.$$

Подходит

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{или} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Если $A(i, q^0) \leq v; i=\overline{1, m}; A(p^0, j) \geq v; j=\overline{1, n}; \exists p_{il}^0; l=1, \dots, k.$

Тогда при решении 3-х нужно проверить $(m+n-2k)$ пер-в.

Пример 5.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим и-чм из элементов по углам: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $p_1 = 1/2; q_1 = 1/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p^0 = (1/2, 0, 0, 1-1/2) = (1/2, 0, 0, 1/2);$$

$$q^0 = (1-1/2, 0, 0, 1/2).$$

Проверка пер-в (их будет 5 - где тех строк и столбцов, кто мы не выбрали):

$$A(p^0, j) \geq v = 1/2, \quad \forall j \in \{2, 3, 4\}?$$

$$A(i, q^0) \leq v, \quad \forall i \in \{2, 3\}?$$

$$A(p^0, 2) = 1/2 \geq 1/2$$

$$A(2, q^0) = 1/2 \leq v$$

$$A(p^0, 3) = 1 \geq 1/2$$

$$A(3, q^0) = 1/2 \leq v$$

$$A(p^0, 4) = 1/2 \geq 1/2$$

Первый интуитивно подобранный порядок уже дал решение. Но если посерьезнее, рассмотрим 4x4-и-чм (с вычеркнутыми средними столбцами):

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 + q_2 = v; \\ q_1 + q_4 = v; \\ q_2 + q_5 = v; \\ q_4 + q_5 = v; \\ q_1 + q_2 + q_4 + q_5 = 1. \end{cases}$$

$$2v = 1 \Rightarrow v = 1/2$$

$$q_1 - q_5 = 0$$

$$q_1 = q_5; q_2 = q_4 \Rightarrow \text{Пусть } q_1 = t = q_5;$$

$$q_2 = 1/2 - t = q_4; t \in [0, 1/2]$$

Тогда q^0 запишем в удобн. виде:

$$q^0 = (t, 1/2-t, 0, 1/2-t, t)$$

Проверим пер-ва:

$A(i, q^0) \leq v$ - проверим не надо, ибо строки не вычеркивали.

Для $A(p^0, j)$ рассчитаем p^0 :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = v; \\ p_1 + p_3 = v; \\ p_2 + p_4 = v; \\ p_3 + p_4 = v; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^0 = (s, 1/2-s, 1/2-s, s).$$

Вывернули 1 стр.

$\Rightarrow$ одно и-чм.

$$A(p^0, 3) = s+s \geq 1/2?$$

$$s \geq 1/4; \text{ тогда } s \in [1/4, 1/2]$$

А теперь ещё посмотрим, получится ли подобная 2×2 -субматрица.

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p^0 = (0, 1/2, 0, 1/2);$$

$q^0 = (1/2, 0, 1/2, 0, 0)$.
 $A(p^0, 2) = 0 \neq 1/2$. Получив матрицу такого же вида, что и в первом случае, решение мы не получили.

Пример 5.4а (K/p). Найти решение в афф. строчечных.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычеркнем 1-ю столбцу. Запишем остаток в обратном порядке единиц форму:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1/2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow q_3 = -\frac{2}{13}$; оно < 0 , значит такая система не подходит для получения ответа. Нужно вычеркивать другой столбцу. А как угадывать?

Чётких критериев нет. Если эвристическое правило: можно вычеркивать столбцы, где сумма элементов больше.

После вычеркивания последнего и вычеркивая в расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow q_1 = 1/2; q_2 = 5/2; q_3 = 1/2; v = \frac{13}{4}$$

$$q^0 = (1/2, 5/2, 1/2, 0)$$

Выясним ситуацию для p . Пишем расширенную для транспонированного варианта:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3/4 \end{array} \right);$$

$$p_3 = 3/8; v = 13/4;$$

$$p_2 = 1/2; p_1 = 1/8.$$

$$p^0 = (1/8, 1/2, 3/8)$$

Один столбцу два вычеркнут $\Rightarrow$ проверим одно из-во:

$$A(p^0, 4) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{3}{8} \geq \frac{13}{4};$$

$$\frac{4+8+15}{8} \geq \frac{26}{8}. \text{ Да.}$$

Метод Брауна

$I_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{если на } t\text{-ом шаге выбран } j\text{-столбец;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Тогда $\sum_{t=1}^k a_{ij_t} = \sum_{t=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot I_{tj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \underbrace{\sum_{t=1}^k I_{tj}}_{l_j}$ (это k раз по ok -ти поимеем $\{v_1(k)\}$ и $\{v_2(k)\}$).

Пример 5.5

$$\varepsilon = 1/5; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}; p^0 = q^0 = (0, 2/3, 1/3); v = 1.$$

k	i_k	$c_1(\cdot)$	$c_2(\cdot)$	$c_3(\cdot)$	$v_1(\cdot)$	j_k	$d_1(\cdot)$	$d_2(\cdot)$	$d_3(\cdot)$	$v_2(\cdot)$
1	1	2	2	-1	2	1	2	1	0	0
2	1	2	5	-4	5/2	3	4	2	0	0
3	2	2	8	-7	8/3	3	6	2	3	2/3

Значения максимума (на v_1)
 прибавили 3 столбца (на v_2)
 $\max_k v_k = 5/2$

Сейчас $\varepsilon = 8/3 - 2/3 = 2$; $v_1(3) = 8/3$, но $v_1^*(3) = 2$ (минимальное); $v_2(3) = v_2^*(3) = 2/3$
 $\varepsilon^* = 4/3$. Сделаем 10 итераций:

4	2	2	2	1/2
5	2	8/5	1	2/5
6	2	4/3	1	1/3
7	2	8/7	1	2/7
8	2	1	1	1/4
9	3	11/9	1	5/9
10	3	7/5	2	4/5

$$v_1^*(10) = 1, t_1 = 8; v_2^*(10) = 4/5, t_2 = 10.$$

$$p = (2/10, 6/10, 2/10); q = (1/8, 5/8, 2/8).$$

Игровые модели

8.10.20

Теория игр

100% студента

① "Нападение-оборона": есть n обороняемых пунктов;

A и B - количество ср-в нападения и обороны (они бесконечно-делимые). Стратегия 1-го игрока (атака) состоит в распределении своих ср-в по точкам путём выбора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X = \{x \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0; i=1, n\}$. Аналогично со вторым игроком.

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \max[x_i - m_i y_i, 0]; \quad m_i - \text{коэф. во ср-в нападения, к-рое может уничтожить одна единица обороны на п-кте}$$

$$m_1 \geq \dots \geq m_n$$

② "Дуэль": чистая и смешанная.

Участники в начальный момент времени начинают сближаться, и расстояние м-ду ними начинает убывать, начиная с d_0 .

У каждого есть функция мощности $p_k(d)$; k -номер дуэанта — она определяет вероятность попадания в противника с р-нием d .

Первый стреляет тот, у к-рого "стратегия больше", т.е. кто стреляет с большего расстояния.

Модель "чистая", если оппонент сможет выстрел соперника.

Пример 7.1 (соответствующие значения)

$p_1(d) = p_2(d) = 1; 0 \leq d \leq d_0 \leq 1$. Тогда:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ (1-x)y, & 0 \leq x < y \leq 1. \end{cases}$$

Допустим, спектры ψ^0 и φ^0 совпадают и равны $[0, a]$, где $a \leq 1$ — нар-р, подлетающий определению. Пусть φ^0 и ψ^0 имеют плотности $f(x)$ и $g(y)$. По св-ву гомог. непрерывности: $F(\varphi^0, \psi^0) = v \quad \forall \psi^0 \in Sp(\varphi^0)$.

$$\int_0^a F(x, y) \frac{f(x)}{d\varphi^0(x)} dx = \int_0^y \underbrace{(1-x)y f(x)}_{0 \leq x < y} dx + \int_y^a \underbrace{(1-x)f(x)}_{y \leq x \leq a} dx = v. \quad (*)$$

Дифференцируем по y гур-м (*):

1st pass: $y(1-y)f(y) + \int_0^y (1-x)f(x)dx - (1-y)f(y) = 0 \Rightarrow \int_0^y (1-x)f(x)dx - (1-y)^2 f(y) = 0;$

$\Rightarrow$ 2nd pass: $2(1-y)f(y) - (1-y)^2 f'(y) + (1-y)f(y) = 0 \Rightarrow 3(1-y)f(y) = (1-y)^2 f'(y) \Rightarrow (3f(y) - (1-y)f'(y)) \cdot \frac{1}{1-y} = 0$

$$\frac{d}{dy} \ln f(y) = \frac{2}{1-y}$$

$U_1 = \{Y, K, L\}$ — число стратегий первого игрока с точностью до симметрии при игре в TIC-TAC-TOE.

$V_1(Y) = \{L, K_1, K_2, Y_1, Y_2\}$: $\begin{pmatrix} X & K_1 & Y_1 \\ K_1 & L & K_2 \\ Y_1 & K_2 & Y_2 \end{pmatrix}$

$V_1(L) = \{K, Y\}$ — равнозначны разные углы и края

$U_2(Y, L) = \{K_1, K_2, Y_1, Y_2\}$: $\begin{pmatrix} X & K_1 & Y_1 \\ K_1 & O & K_2 \\ Y_1 & K_2 & Y_2 \end{pmatrix}$

и т.д. Альтернативы больше.

Можно представить, насколько много случаев с шахматами.

Пример 8.2 (подобное будет на к.р.)

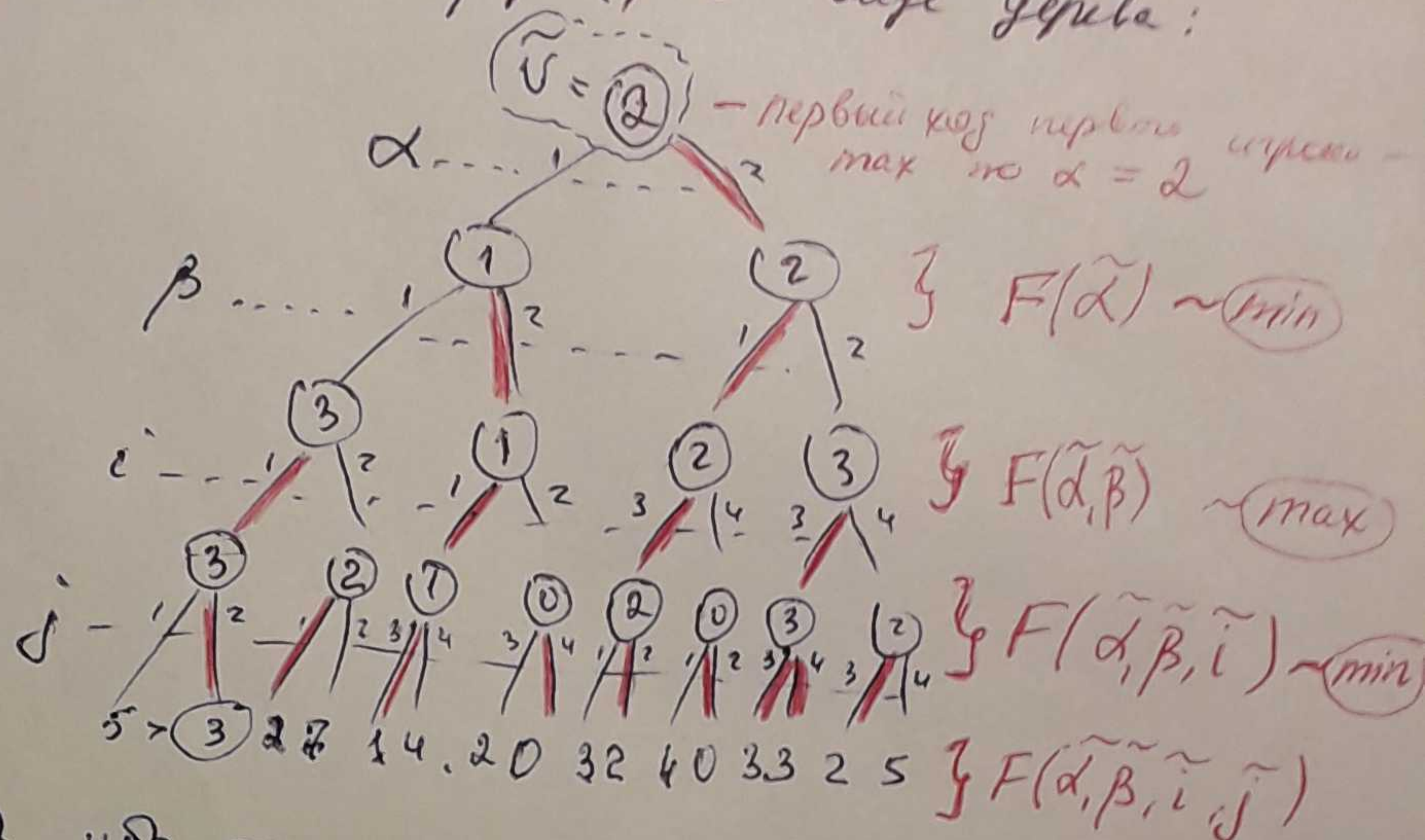
Итерационные
игры с неполной
информацией

15.10.20
Теория игр

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

α_1 α_2
 β_1 β_2

Есть нормальная форма, в виде дерева:



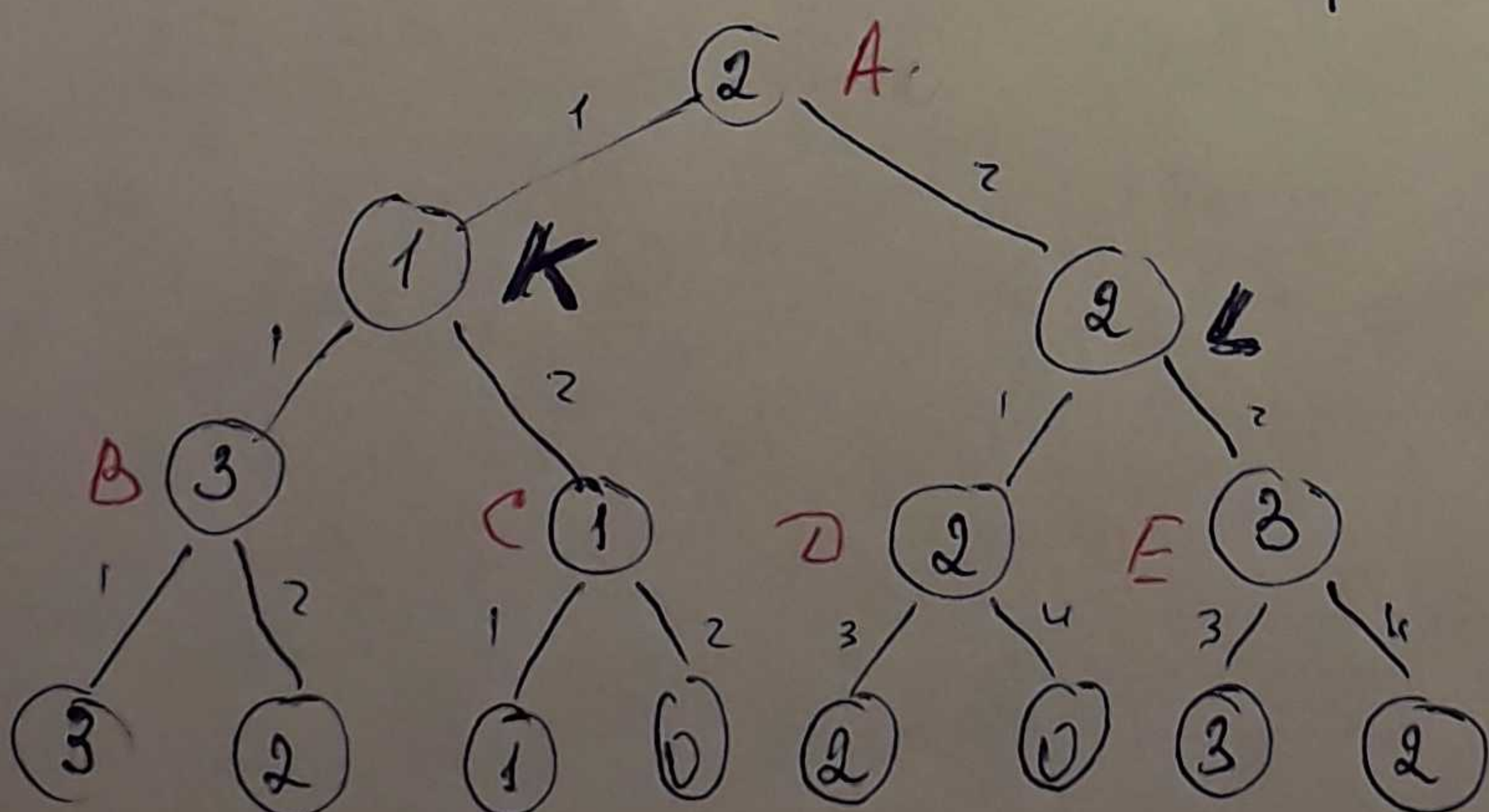
Нужно не забыть
значение функции Беллмана.

$\alpha = \beta = i = 1$. Выберем $j = 2$, и в этом значении игры ищем.

$\tilde{\alpha}$ - аналог $\tilde{x}_1$;
 $\tilde{\beta}$ - аналог $\tilde{y}_1$;
 $\tilde{i}$ - аналог $\tilde{x}_2$;
 $\tilde{j}$ - аналог $\tilde{y}_2$.

Потом перечисляются $\tilde{i}^0, \tilde{j}^0$. В случае
 $\tilde{j}^0$ нужно рассмотреть все возможные варианты
с $\tilde{\alpha}$, именно поэтому там $\tilde{j}^0(1, \dots)$ и
 $\tilde{j}^0(2, \dots)$.

"Политорационная" игра: 1-2-1 (начинает и заканчивает первый).



$\tilde{\alpha}: A, B, C, D, E$;
 $\tilde{\beta}: K, L$.

A	B	C	D	E
1	1	1	*	*

восприм A=1,
свое много не
покажи

Тогда и записывается
таблица. Подобная ситуа-
ция с A=1 ~~еще~~ дает 4
варианта: 111*, 112*,
121*, 122*.

и т.д.

А для второго игрока
возмуже 4 варианта, там
иногда и отбрасывать не
нужно.

Таблица: заготовке
для матрицы,
кстати, свести к
матр. игре

ABCDE	11	12	21	22
111**	3	3	1	1
112**	3	3	0	0
121**	2	2	1	1
122**	2	2	0	0
2**33	2	3	2	3
2**34	2	2	2	2
2**43	0	3	0	3
2**44	0	2	0	2

≤ optim

Это уже записывается по 4-та сразу.

В получившейся игре ищем $\max \min$ и $\min \max$,
 $(2^{**}3^*)$ - для первого и (21) - для второго.

Т.о., позиционная игра с полной информацией достаточно можно свести к матричной.

Упр-е 8.1

Покажем, что в игре Γ с полной информацией о предыдущих ходах $\underline{v}$ и $\bar{v}$ задаются так:

$$\underline{v} = \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1} \max_{x_2 \in U_2(x_1, y_1)} \min_{y_2 \in V_2(x_1, y_1)} \dots \max_{x_T \in U_T(\alpha_T)} \min_{y_T \in V_T(\beta_T)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_T); \quad (*)$$

$$\bar{v} = \min_{y_1 \in V_1} \max_{x_1 \in U_1} \dots \min_{y_T \in V_T(\beta_T)} \max_{x_T \in U_T(\alpha_T)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_T).$$

] W - правая часть (*). Поочередно поочередно $\tilde{x}_1^0, y_1^*, \tilde{x}_2^0, y_2^*, \dots$
 (по очередности $\min$ и $\max$). Аналогично
 $\min_{\tilde{y} \in Y} F(\tilde{x}^0, \tilde{y}) \geq W \Rightarrow F(\tilde{x}^0, y) = \underline{v}$ где-то по Теореме Цермело. Аналогично и с верхней ценю.

Пример 8.4

$$\nexists A'(p, 1) = \frac{29}{7}; A'(p, 2) = \frac{29}{7}; \text{ т.о. } v = \frac{29}{7} \text{ (проверим, да),}$$

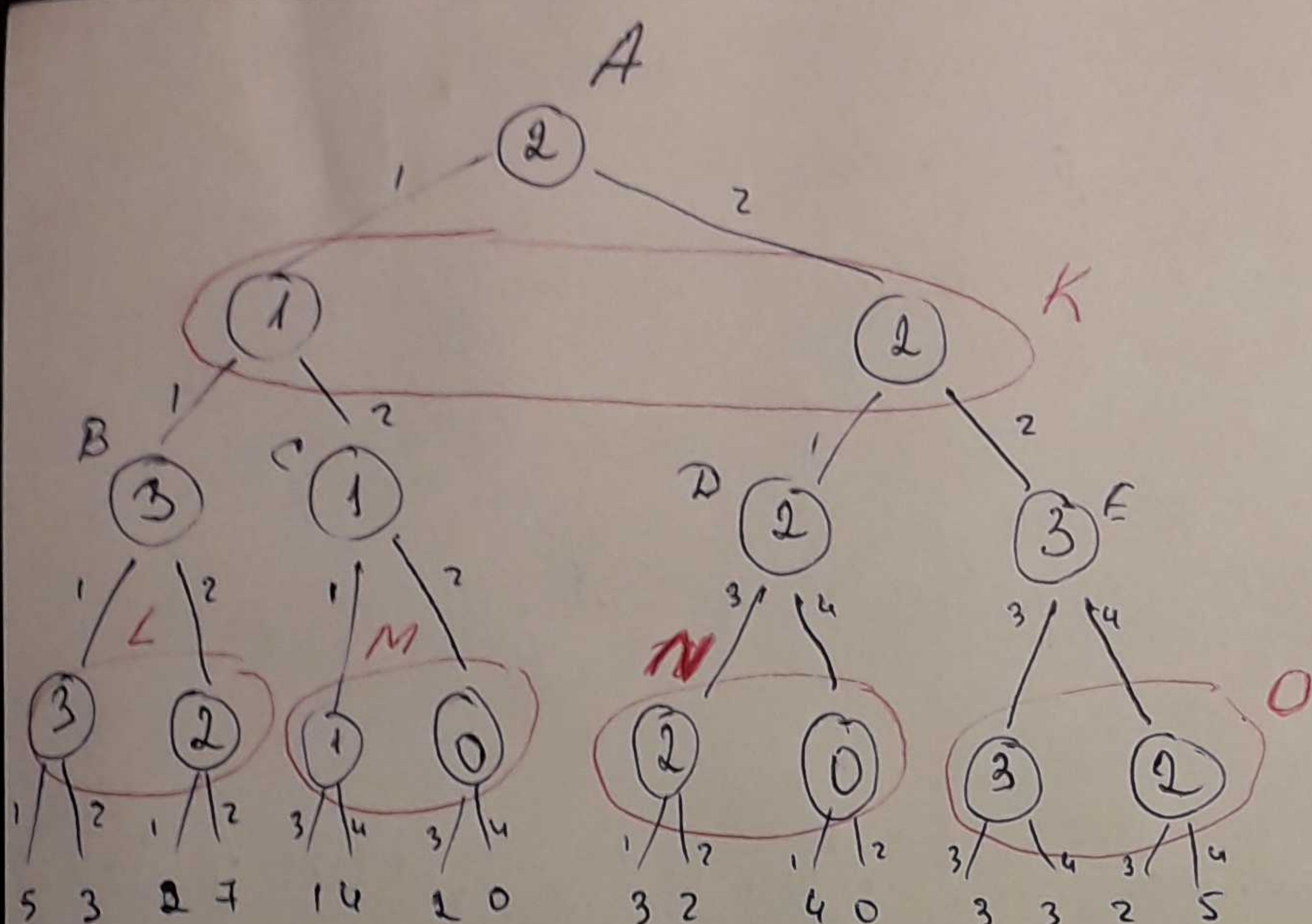
$$\text{где } A' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix};$$

] $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Это те блоки из первого примера. В каждом блоке есть решения.

Т.о., схема такая: $\nexists$ сразу. строим на втором шаге, затем для каждого случая определяем цену игры.

$$(v(\alpha, \beta))_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 29/7 & 8/5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ (1-p) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{29}{7}p + 2(1-p) = v \\ \frac{8}{5}p + 3(1-p) = v \end{cases} \Rightarrow p = \frac{35}{124}.$$

$$\text{Аналог, } q = \frac{49}{124}, \quad v = \frac{323}{124}.$$



KLMNO								
	11+1*	11+2*	12+1*	12+2*	2+3+3	2+3+4	2+4+3	2+4+4
AB	5	5	3	3	1	1	4	4
BC	5	5	3	3	2	2	0	0
CD	2	2	7	7	1	1	4	4
DE	2	2	7	7	2	2	0	0
E	3	2	3	2	3	3	3	3
A	3	2	3	2	2	5	2	5
B	4	0	4	0	3	3	3	3
C	4	0	4	0	2	5	2	5
max	5	5	7	7	3	5	4	5

Т.о., $\underline{v}=2$; $\bar{v}=3$. Можно решить матричную игру 2-3 сведение к 3-ей ЛП: $A(p, j) \geq \underline{v}$; $\sum p = 1$; $\underline{v} \rightarrow \max$.

Допустим, решение достигнуто. Будет $\vec{p} = \frac{1}{124} (4, 21, 10, 0, 89, 0, 0, 0)$;

$$\vec{q} = \frac{1}{124} (0, 28, 0, 21, 60, 0, 15, 0)$$

З.ч.и к.р.!

1. Найти седловую точку для матр. игры
2. —" для керр. игры
3. На доминирование строк/столбцов
4. $2 \times n$ на упр.
5. 3×4 , выгере, столбцы и 2-3 Гаусса
6. $F(x, y)$ - бон.
7. Игры с полн./неполн. информ.

(x^0, y^0) - оптимальна по Парето,

$$\text{если } \nexists (x, y) : \begin{cases} F(x, y) \gg F(x^0, y^0); \\ G(x, y) \geq G(x^0, y^0); \end{cases}$$

при этом одно из них строгое.

Пример 9.6

$$\begin{aligned} i(1) &= \{2\}; & j(1) &= \{1, 4\}; \\ i(2) &= \{1\}; & j(2) &= \{2, 3\}; \\ i(3) &= \{1, 3, 4\}; & j(3) &= \{2, 3\}; \\ i(4) &= \{2, 3\}; & j(4) &= \{1\}. \end{aligned}$$

Пересечения: $i=j=3$.

К вопросу
о ф-ции наилучших
ответов.

* Пример 9.7 (к/р: пересечение почти наверняка будет в нек-х точках)

$$F(x, y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy; \quad X = Y = [0, 1].$$

$$G(x, y) = -(x + y - 1)^2;$$

Зам, F, G - строго выпуклы по x и y соотв-но.

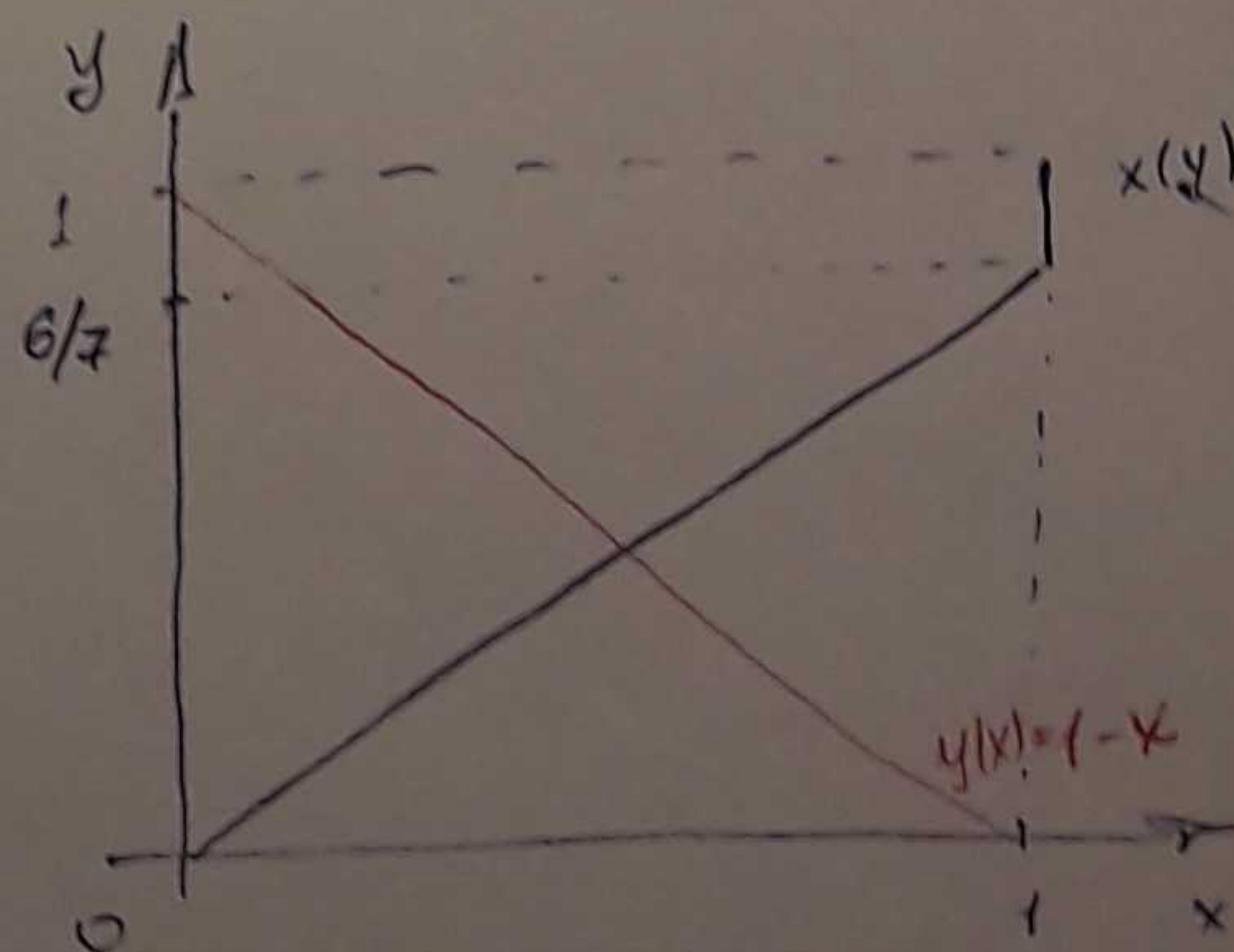
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -6x + 7y = 0; \quad x = \frac{7}{6}y \Rightarrow x(y) = \begin{cases} \frac{7}{6}y & ; y \in [0, 6/7]; \\ 1 & ; y \in (6/7, 1]. \end{cases}$$

- ф-ция наилучших
ответов первого
на ходы второго.

Аналог, $y(x) = 1 - x$. Решим систему:

$$\begin{cases} x(y) = x; \\ y(x) = y. \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{7}{6}y \Rightarrow y^0 = 6/13; \quad x^0 = 7/13.$$



В смешанных расширениях биматричных игр оптимальное расширение:

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j; \quad B(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j.$$

Тогда матричное расширение - $\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q), B(p, q) \rangle;$
 $p \in P; q \in Q.$

к/р: Нахождение
ситуаций
равновесия
в несп-ной
игре (N1)

29.10.20
Теория игр

★★★★★
★★★★★
★★★★★
★★★★★
★★★★★

22 окт. была
к.р.

Теорема 10.2: т.к. нет условий на мощности X^0 и Y^0 ,
мы не можем её задействовать для решения 3×4 -
битовых игр.

Упр-е 10.1

Док-ть, что в игре Γ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

сущ-т единственное равновесие по Нэшу $(p^0, q^0) = ((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))$

к.р.: Находим ситуационное/строго доминирующее в би-матр. играх с $m=2$ (N5)

5.11.20

Теория игр

$$\nexists A(i, q^0) = 1; \forall i \Rightarrow A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0) = 5, \forall i.$$

$$\text{Аналогично, } B(p^0, j) \geq B(p^0, q^0) = 5, \forall j.$$

Единственность? В силу Т-мы 10.2, нужно выбрать подмнож-во X^0 и Y^0 для выполнения с-м пер-в. Есть неск. вариантов:

- 1). $X^0 = X$; (1 вар.)
- 2). $|X^0| = 2$; (3 вар.)
- 3). $|X^0| = 1$; (3 вар.)

следующий

$$3). p_1^0 = 0; p_2^0 = 0; p_3^0 = 1$$

$$\begin{cases} A(1, q^0) < 5; \\ A(2, q^0) < 5; \\ A(3, q^0) = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q_1 + q_3 < 5; \\ q_1 + 2q_2 < 5; \\ q_2 + 2q_3 = 5; \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

$q_3 > 1/3$. Получается,

$$\begin{cases} B(p^0, 3) = 5; \\ B(p^0, 1) \leq 5; \\ B(p^0, 2) \leq 5. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Проверим эти} \\ \text{пер-ва на} \\ \text{выполнимость} \end{array}$$

$$\begin{aligned} B(p^0, 1) &= 0; \\ B(p^0, 2) &= 2; \Rightarrow 0 \leq 1 \\ B(p^0, 3) &= 1 = 5. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый из случаев.

$$\begin{aligned} 2). A(1, q^0) &\leq 5, \leftarrow \text{тут } "<" \\ A(2, q^0) &\leq 5, \leftarrow \text{тут } "=" \\ A(3, q^0) &\leq 5, \leftarrow \text{тут } "<" \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{предполо-} \\ \text{жение} \end{array} \right\}$$

Подставим в и-гу A:

$$\begin{cases} 2q_1 + q_3 < 5; \\ q_1 + 2q_2 = 5; \\ q_2 + 2q_3 = 5; \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} q_3 &= \frac{1}{3} > 0 \\ q_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1^0 &= 0; \\ p_2^0 &> 0; \\ p_3^0 &> 0. \end{aligned}$$

При этом:

$$\begin{aligned} B(p^0, 2) &= 5; \\ B(p^0, 3) &= 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 + 2p_3 &= 5; \\ p_3 &= 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2^0 &= 0; p_3^0 = 0. \text{ Нельзя,} \\ &\text{у нас уже} \\ p_1^0 &= 0 \Rightarrow \sum p_i^0 \neq 1. \end{aligned}$$

Так, в случаях 2), 3). получили противоречия. Слойер: для 1). тоже будет противоречие. Т.о., показали единственность ситуации равновесия.

Касательно общего поведения;

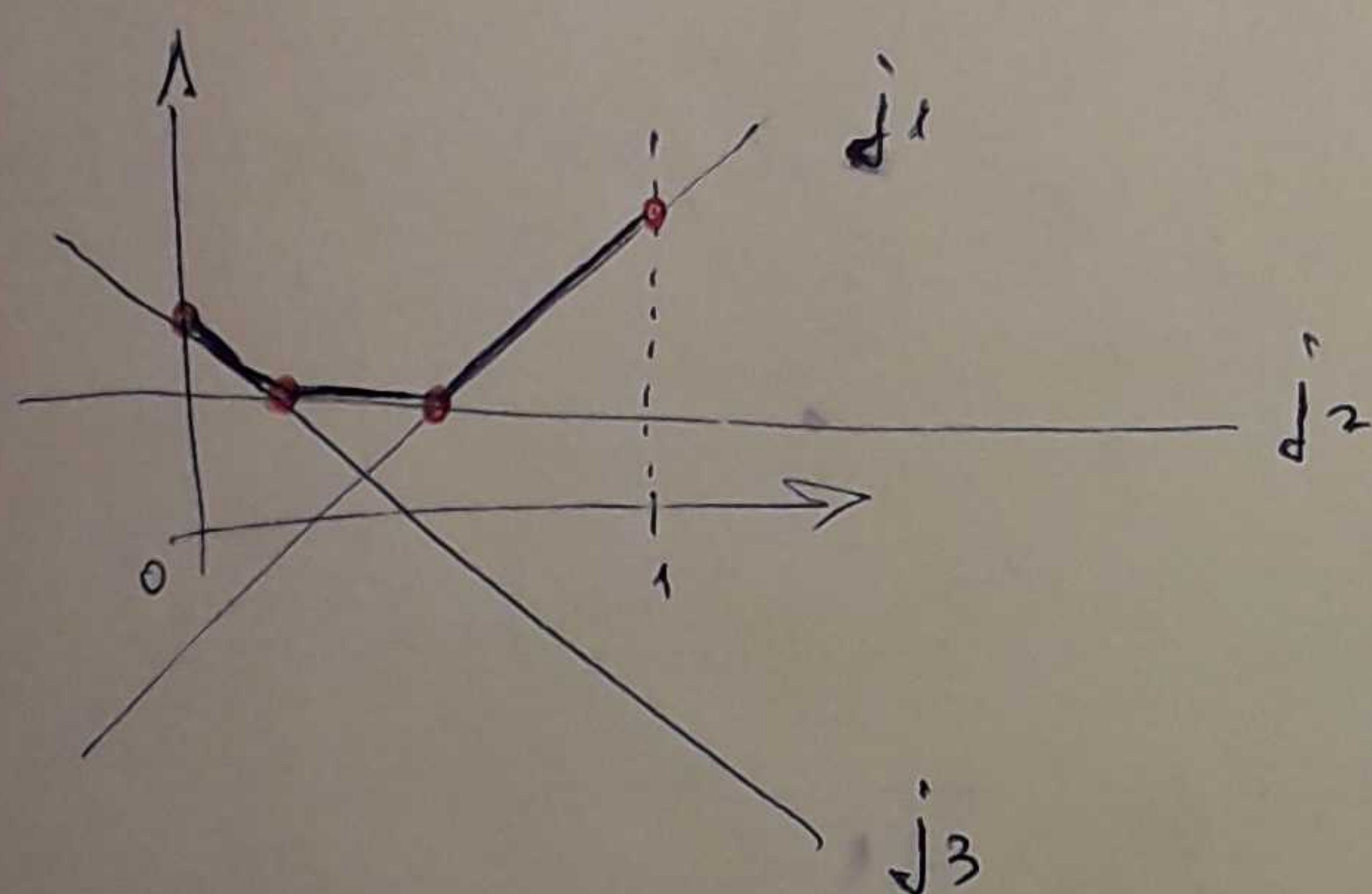
$$A \rightarrow \bar{A} : \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка линейной независимости для каждой строки / столбца.
Напр., после ~~вычитания~~ 3-ей строки вычитания

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{линейно независимы}$$

Геометрическая интерпретация для пер двух лиц:

Рассматривается верхняя огибающая, как, например, в случае с антикооперативными играми. Однако, как видно на рисунке, нужно ещё рассматривать точки на огибающей, где абсцисса = 0 или 1.

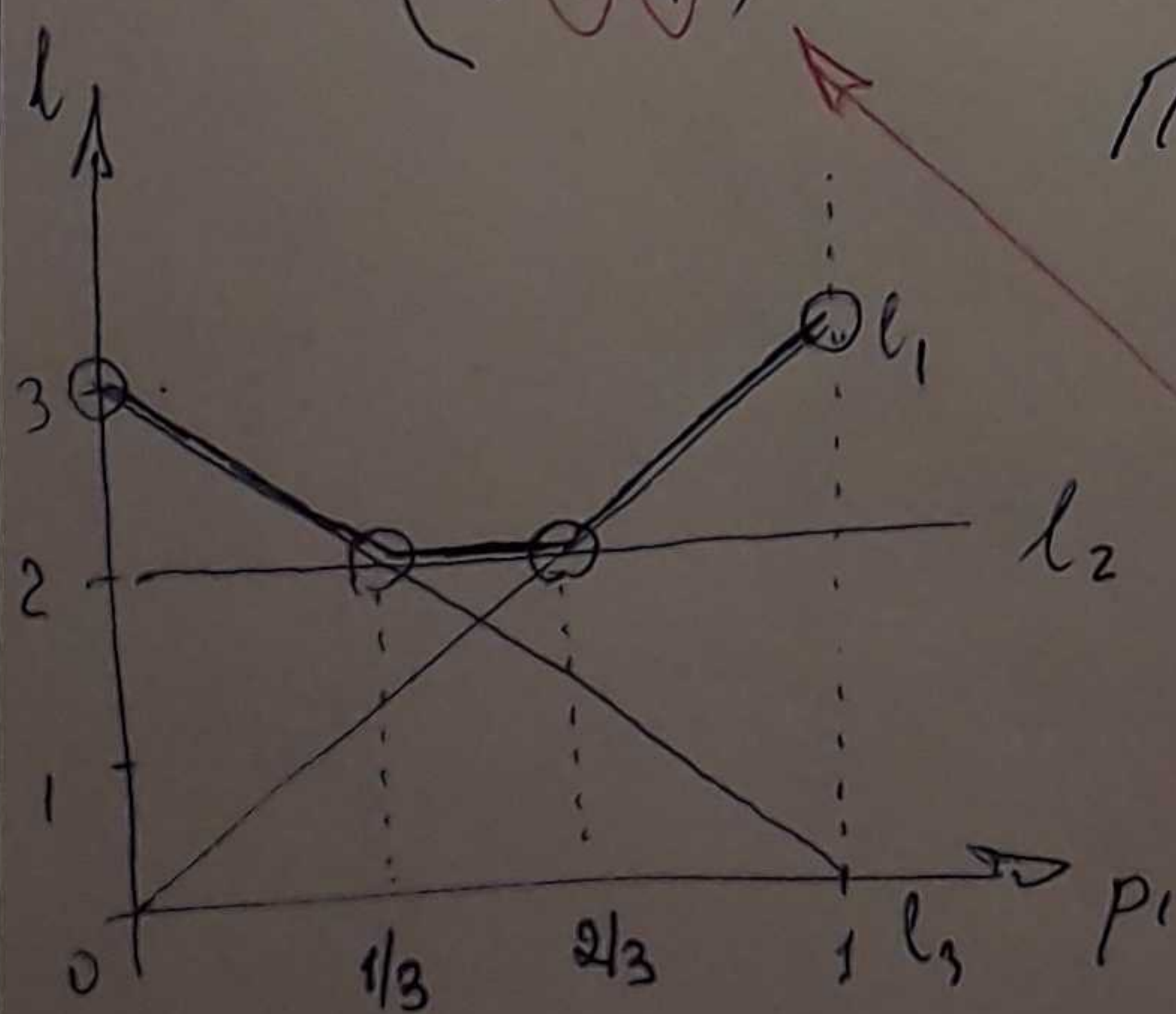


$$q^0: q_j^0 = \begin{cases} q^*, & j=j^1; \\ 1-q^*, & j=j^2; \\ 0, & j \neq j^1, j^2; \end{cases}$$

где (j^1, j^2) — рассматриваемая для с-мат (10.2) пара стратегий — столбцов.

* Пример 10.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



Получим уравнение прямых:

$$\begin{aligned} l_1(p_1) &= 3p_1; \\ l_2(p_1) &= l_2 \equiv 2; \\ l_3(p_1) &= 3(1-p_1). \end{aligned}$$

пересечение 2-ой и 3-ей прямой
↓
берем эту точку

$$p_1^0 = 1/3 \Rightarrow \begin{cases} 4q^* + 5(1-q^*) = v_1; \\ 2q^* + (1-q^*) = v_1. \end{cases} \Rightarrow q^* = 2 > 1 \text{ ?!}$$

Теперь * другой $p_1^0 = 2/3$:

$$\begin{cases} 2q^* + 4(1-q^*) = v_1; \\ 4q^* + 2(1-q^*) = v_1. \end{cases} \Rightarrow q^* = 1/2; v_1 = 3$$

Ответ: $(p^0, q^0) = ((2/3, 1/3), (1/2, 1/2, 0))$

Пример 10.3 *

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{cases} p_1 \\ 1-p_1 \end{cases}$$

$$l_1 = 2p_1 - (1-p_1) = -1 + 3p_1;$$

$$l_2 = 3 - p_1.$$

Играемая ситуация.

$$p^0 = (1, 0);$$

$$q^0 = (1/2, 1/2).$$

$$(q^*, 1-q^*) = q^0.$$

$$\begin{aligned} A(1, q^0) &= v_1; \\ A(2, q^0) &\leq v_1 \end{aligned} \Rightarrow$$

св-во
доминирующей
нетипичности

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-q^* = v_1; \\ q^* \leq v_1; \\ 0 \leq q^* \leq 1. \end{cases}$$

$$0 \leq q^* \leq 1/2$$

Отрезок ситуаций равновесия:

$$\{ ((1, 0), (q^*, 1-q^*)) \mid 0 \leq q^* \leq 1/2 \}.$$

Пример 10.4 (доминирование)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A[1]$ доминируется полусуммой 2-ой и 3-ей строк: $p = (0, 1/2, 1/2) \succ i=1$
и в случае B по аналогии. Первый столбец строго доминируется
модель группы (после вычитания
первой строки)

$$\text{Если } X = \{1, 2, 3\} = X_1, \text{ то } X_2 = \{2, 3\};$$

$$Y_2 = \{2, 3\}.$$

Получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

так-же

В разных строках-столбцах максимумы $\Rightarrow$ никакой вынужденной комбинацией не задоминируются.

Пример 11.1 в контексте Γ_1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Иерархические
игры 244 или
к.р.: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$
($\approx N_{12}$)

Теория игр
12.11.20

Для каждой строки строится $Y(x)$:

$$Y(1) = \{1\},$$

$$Y(2) = \{1, 2\},$$

$$Y(3) = \{2, 3\}. \text{ Аналогично, для первого игрока:}$$

$$W(1) = 3;$$

$$W(2) = 3;$$

$$W(3) = -5.$$

$$\begin{pmatrix} F_1 = 3; \\ i^0 = 1, 2 \end{pmatrix} \text{ — гарантированный} \\ \text{р-т первого игрока}$$

$$Y(x) = \operatorname{Argmax}_y G(x, y)$$

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y) \text{ —}$$

оценка эффективности/
гарантированный
р-т стратегии x .

F_1 (наименьший гарантированный
р-т 1-го игрока):

$$F_1 = \sup_{x \in X} W(x)$$

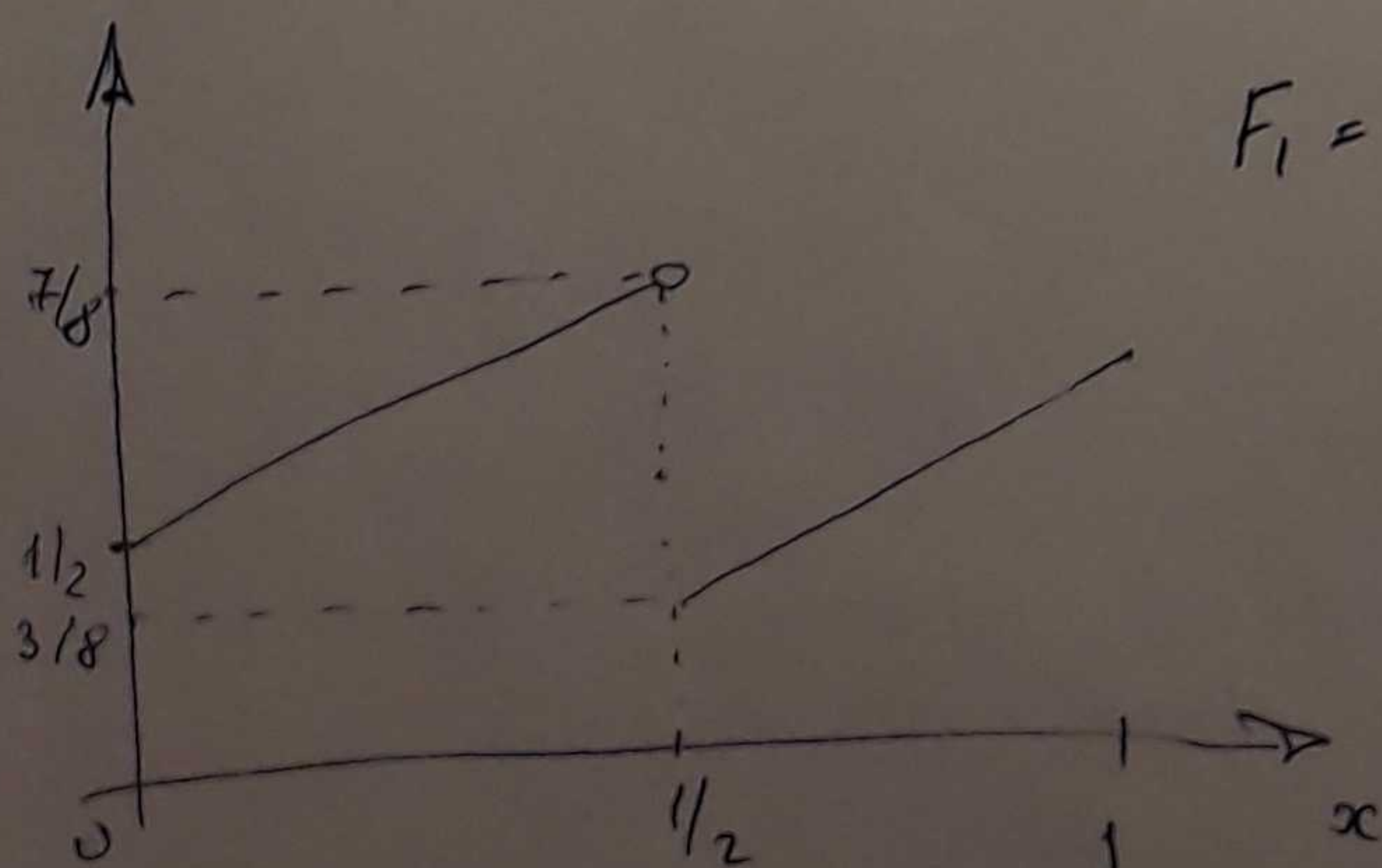
Пример 11.2

$$X = Y = [0, 1]; F(x, y) = 3x/4 + y/2; G(x, y) = (x - y)^2.$$

$$\text{Найдем } Y(x) = \begin{cases} 1, & x < 1/2, \text{ ибо } G(x, 0) - G(x, 1) = 2x - 1; \\ \{0, 1\}, & x = 1/2; \\ 0, & x > 1/2. \end{cases}$$

$$\Delta W(x) = \begin{cases} 3x/4 + 1/2, & x < 1/2; \\ 3x/4, & x \geq 1/2, \end{cases}$$

т.к. выбирается минимум (этот случай анализируется с помощью)



$$F_1 = \sup_x W(x) = 7/8.$$

$$\Delta (1/2 - \varepsilon)$$

$$W(x^\varepsilon) \geq 7/8 - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x^\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} \geq 7/8 - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^\varepsilon = 1/2 - \frac{4}{3} \varepsilon.$$

Ф-ция f ~~не~~ полувып-на снизу, если $\lim f(x^k) \geq f(x^0) \quad \forall \{x^k\} \rightarrow x^0$

или $f(x) = \{x\}$

Аналогично, f полувып-на сверху, если $\lim f(x^k) \leq f(x^0)$

или $f(x) = [x]$

Вернёмся к примеру 11.1 в контексте Г₂:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Выполним, что было $F_1 = 3$.

$$f^H(y) = \begin{cases} 3, & y=1; \\ 1, & y=2; \\ \{1, 2\}, & y=3. \end{cases}$$

$G_2 = 4$, ибо это $\max \min$; при этом
он достигается на столбцах $E = \{1, 2\}$.

D = все пары, где достигается р-тат, строго больший G_2 :

$$D = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}. \quad K = \sup_{(x, y) \in D} F = 4 \quad (\text{см. и-ду } A \text{ и } y \text{ и } x)$$

$$F_2 = \max \{4, 6\} = 6 \quad (\text{по т.ме Тернштейна}).$$

$$f^0(y) = \begin{cases} 3, & y=1; \\ 6, & y=2; \\ \{1, 2\}, & y=3. \end{cases} \quad \begin{array}{l} y \in E \\ y \notin E \end{array}$$

$$F_2 = \max \{K, M\}.$$

идёт в ответ.

ATTENTION

здесь были указаны не стратегии,
а значения в игре, когда $y \in E$.
В учебнике обрат. порядок:

$$f^0(y) = \begin{cases} 3, & y=1; \\ 1, & y=2, 3. \end{cases}$$

Пояснения:

G_2 - минимальный гарант-р-тат
для игрока при условии, что
он не знает, какую стратегию
выберет противник.

$$G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y);$$

$$f^H(y) \in \text{Arg min}_{x \in X} G(x, y).$$

$$E = \text{Arg } G_2;$$

$$K = \begin{cases} \sup_{(x, y) \in D} F(x, y), & D \neq \emptyset; \\ -\infty, & D = \emptyset; \end{cases}$$

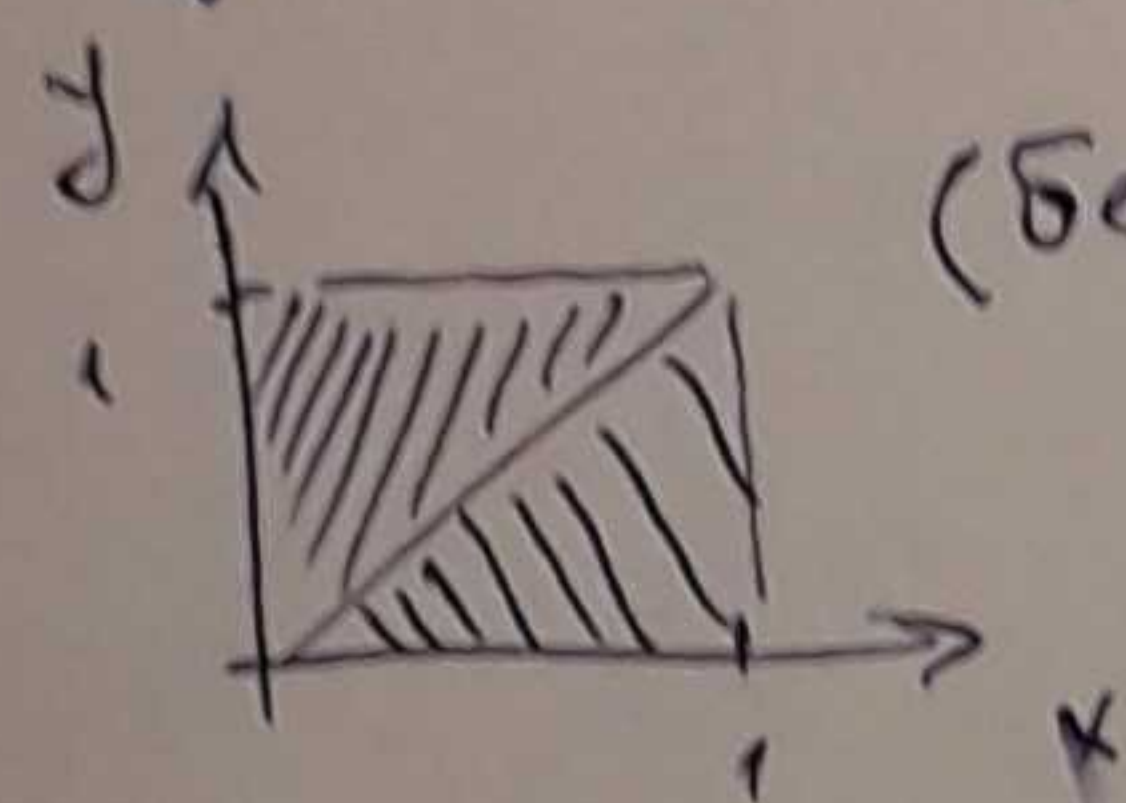
$$M = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Пример 11.2 в контексте Γ_2

$$X = Y = [0, 1]; \quad F(x, y) = 3x/4 + y/2; \quad G(x, y) = (x - y)^2.$$

$$f''(y) = y \Rightarrow G_2 = 0; \quad E = [0, 1].$$

Найдём $D = \{(x, y) \mid (x - y)^2 > 0\}$, но тогда это $\{(x, y) \mid x \neq y\}$:



(без границы)

$$\Phi(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1 - \alpha\varepsilon, 1).$$

$$K = F(1, 1) = 5/4.$$

$$F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq 5/4 - \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\alpha\varepsilon + \frac{1}{2} = 5/4 - \varepsilon$$

$$\alpha = 4/3.$$

$$\text{Тогда } (x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1 - \frac{4}{3}\varepsilon, 1).$$

M:

$$\max_x F(x, y) = 3/4 + y/2;$$

$$\min_{y \in E} \max_x F(x, y) = 3/4 \quad (\text{при } y = 0).$$

$$M = 3/4. \quad M < K \Rightarrow F_2 = 5/4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow F_1 = 7/8 \text{ (по этому подсчитано)} \end{array} \right.$$

$$f^0(y) = \begin{cases} 1 - 4/3\varepsilon, & y = 1; \\ y, & y \neq 1. \end{cases}$$

Зам., выполняются след. соотношения:

$$F_1 \leq F_3 \leq F_2$$

(*)

Пример 11.1 в контексте Γ_3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

max:

$$\Rightarrow G_3 = 6;$$

$$D' = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$K' = 4; \quad F_3 = \max[K', F_1] = 4. \quad \text{При учёте исторических } F_1 = 3, \quad F_2 = 6 \text{ соотношение (*) выполняется.}$$

$$f^H(y) = \begin{cases} 3, & y=1; \\ 1, & y=2; \\ \{1, 2\}, & y=3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^0(y) = \begin{cases} 2, & g(2)=1; \\ 3, & g(2) \neq 1. \end{cases}$$

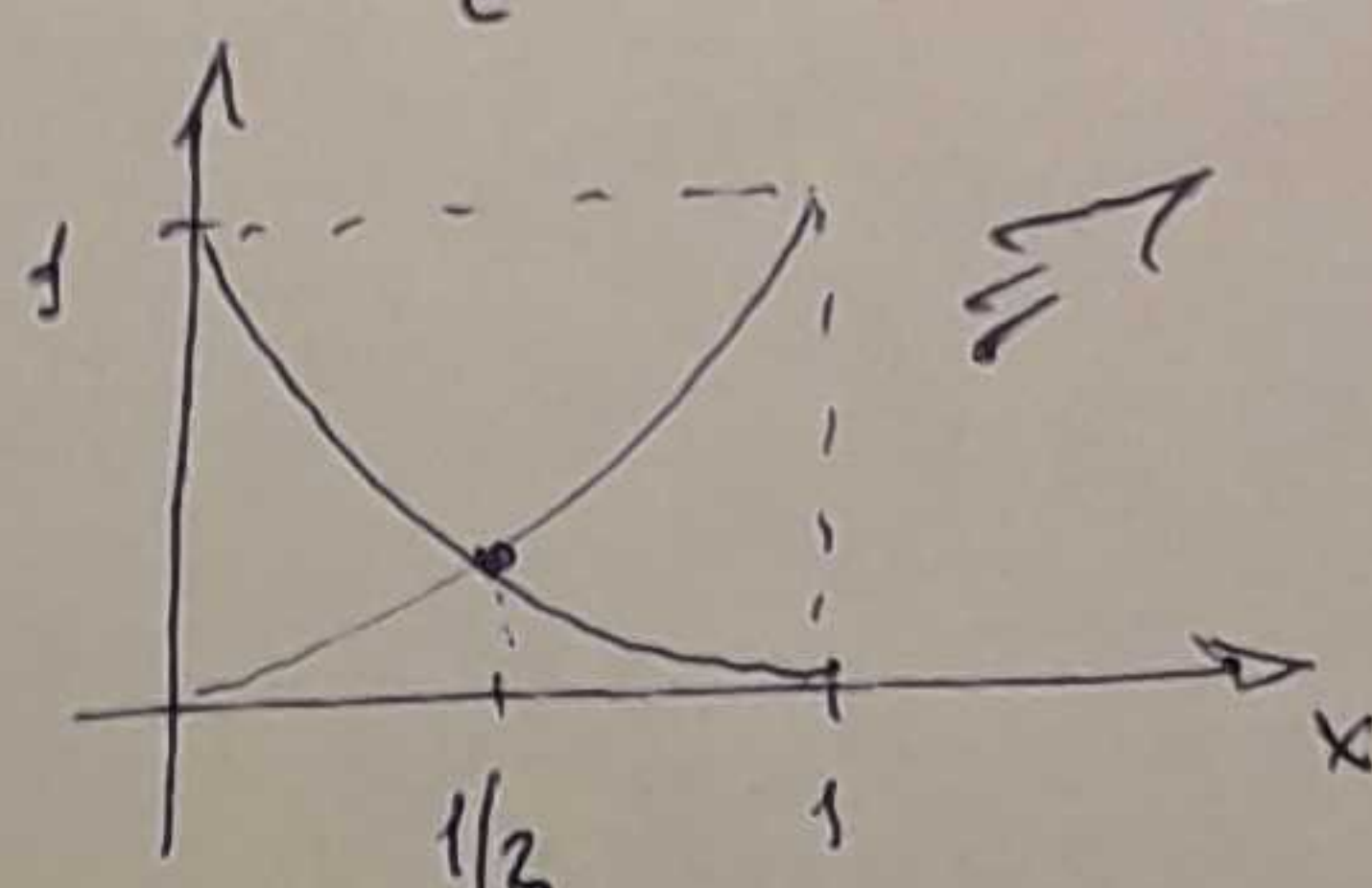
$\arg \min_x \max_y G(x, y)$ — минимизирующий

Пример 11.2 в курсе ГЗ:

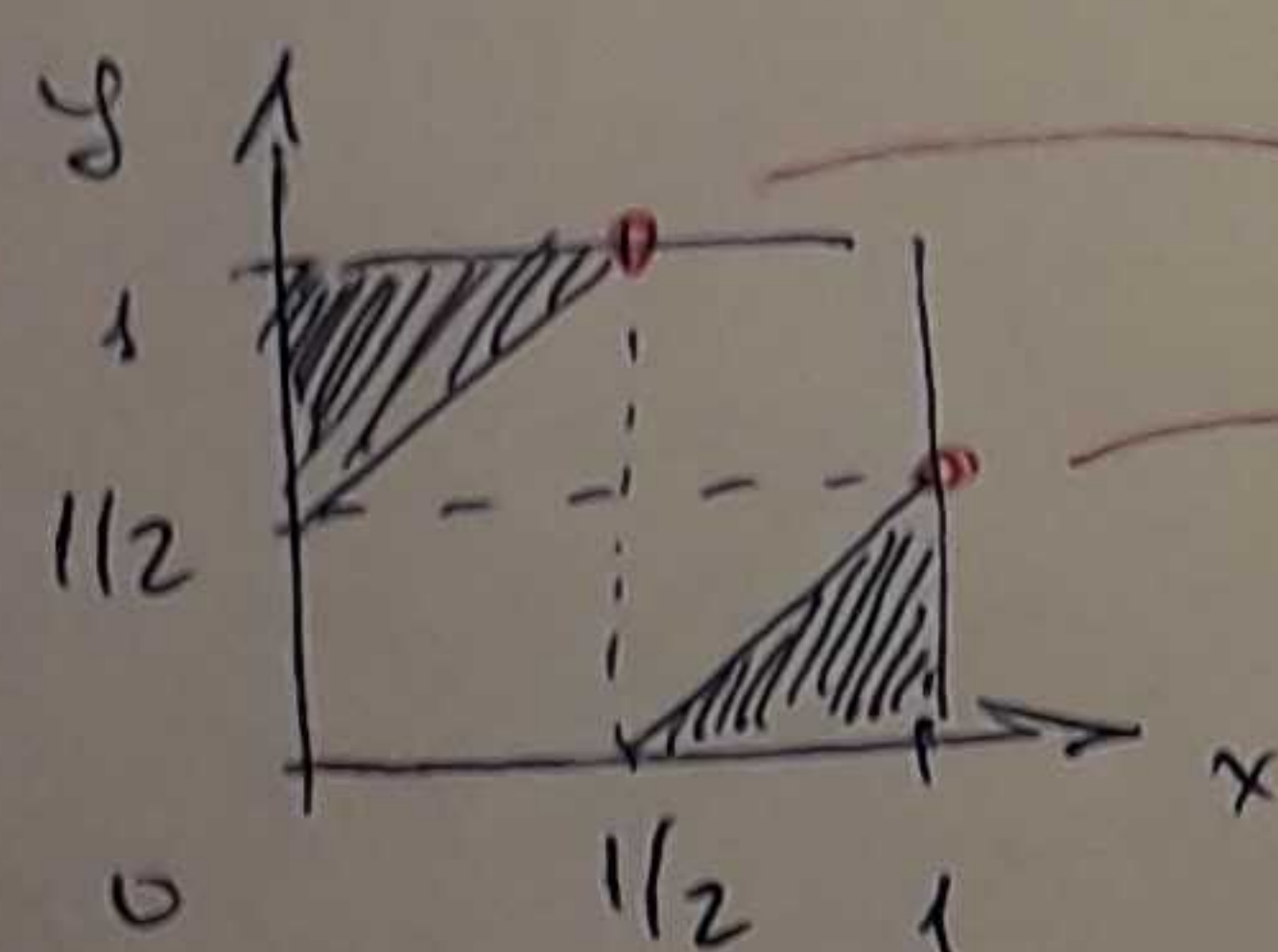
$$X = Y = [0, 1]; F(x, y) = 3x/4 + y/2; G(x, y) = (x - y)^2$$

$$G_3 = \min_x \max_y G(x, y) = \min_x \max_y \{x^2, (x-1)^2\} = 1/4$$

$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x > 1/2; \\ \{0, 1\}, & x = 1/2; \\ 1, & x < 1/2. \end{cases}$$



D' : $G > G_3 = 1/4$, т.е. при $G(x, y) = (x - y)^2$ условие принимает вид $|x - y| > 1/2$, что на $X \times Y$ дает:



$$(1/2, 1) \Rightarrow F(x, y) = 3/8 + 1/2 = 7/8;$$

$$(1, 1/2) \Rightarrow F(x, y) = 3/4 + 1/4 = 1 - \text{большее}$$

$$K' = 1 \Rightarrow F_3 = \max_{F_1} \{7/8, 1\}$$

Наконец, получим выражение для F -функции:

$$f_1(g) = \begin{cases} 1, & g(1) = 1/2 - 2\varepsilon; \\ 1/2, & g(1) \neq 1/2 - 2\varepsilon. \end{cases}$$

→ это исходит из того, что на самой геме $(1, 1/2)$ не включена; введем ε .

$$F(1, 1/2 - 2\varepsilon) = 1 - \varepsilon; \quad \alpha = 2$$

Упр-е 11.5

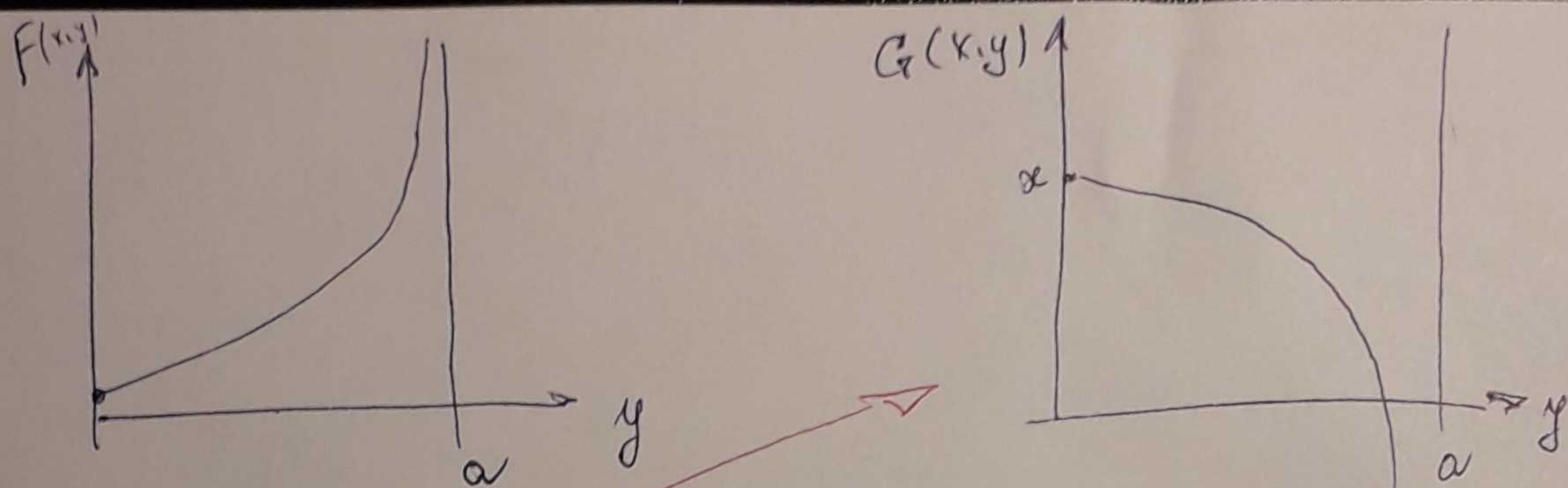
$$F(x, y) = cy - x; G(x, y) = x - b \ln \frac{a}{a - y};$$

$$ac > b; X = [0, +\infty); Y = [0, a).$$

x — цена за произвед. товар y ;

c — цена за товар. Т.е. F — функция выигрыша управляемого;

G — функция выигрыша производящего.



$$\boxed{\Gamma_1:} \quad Y(x)=0; \quad F_1 = \max_x \min_{y \in Y(x)} F(x,y) = \max_x F(x,0) = \max_x (-x) = 0 \quad (\text{в игре})$$

Т.о., $x^0 = 0$ (если предположить, что объявившая, второму игроку не имеет права работать; правда, и р-таг нулевой)

$$\boxed{\Gamma_2:} \quad G_2 = \max_x \min_y G(x,y) \quad \text{при} \quad x^H(y)=0; \quad G_2=0, \quad E=\{0\}$$

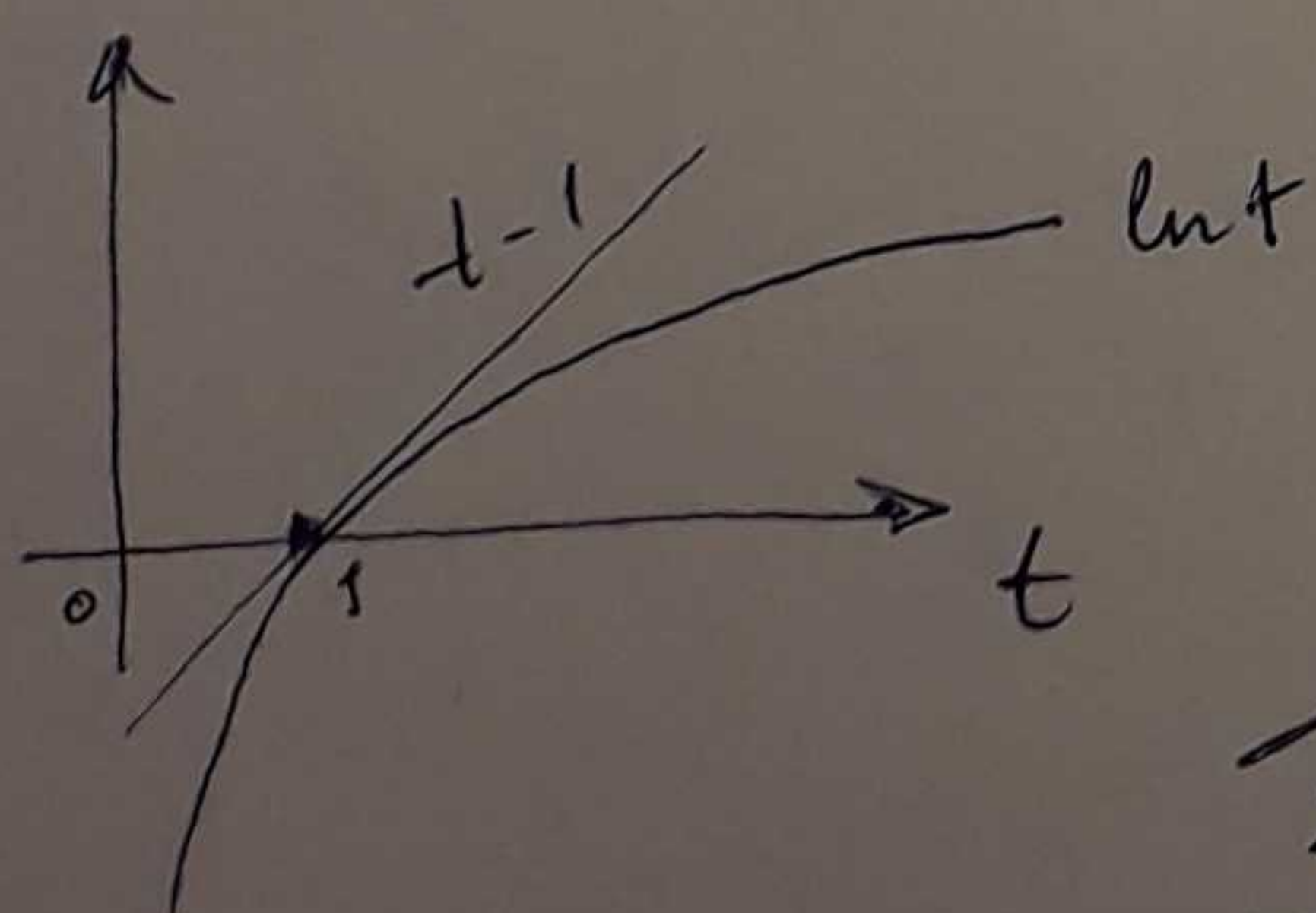
$$M=0 = \min_{y \in E} \max_x F(x,y);$$

$$D = \left\{ (x,y) \mid x - b \ln \frac{a}{a-y} > 0 \right\}$$

$$ca - b - b \ln \frac{ac}{b} > 0$$

$$\frac{ca}{b} - 1 - \ln \frac{ac}{b} > 0. \quad] \quad t = \frac{ca}{b}$$

$$t - 1 > \ln t.$$



$$y = y^\varepsilon?$$

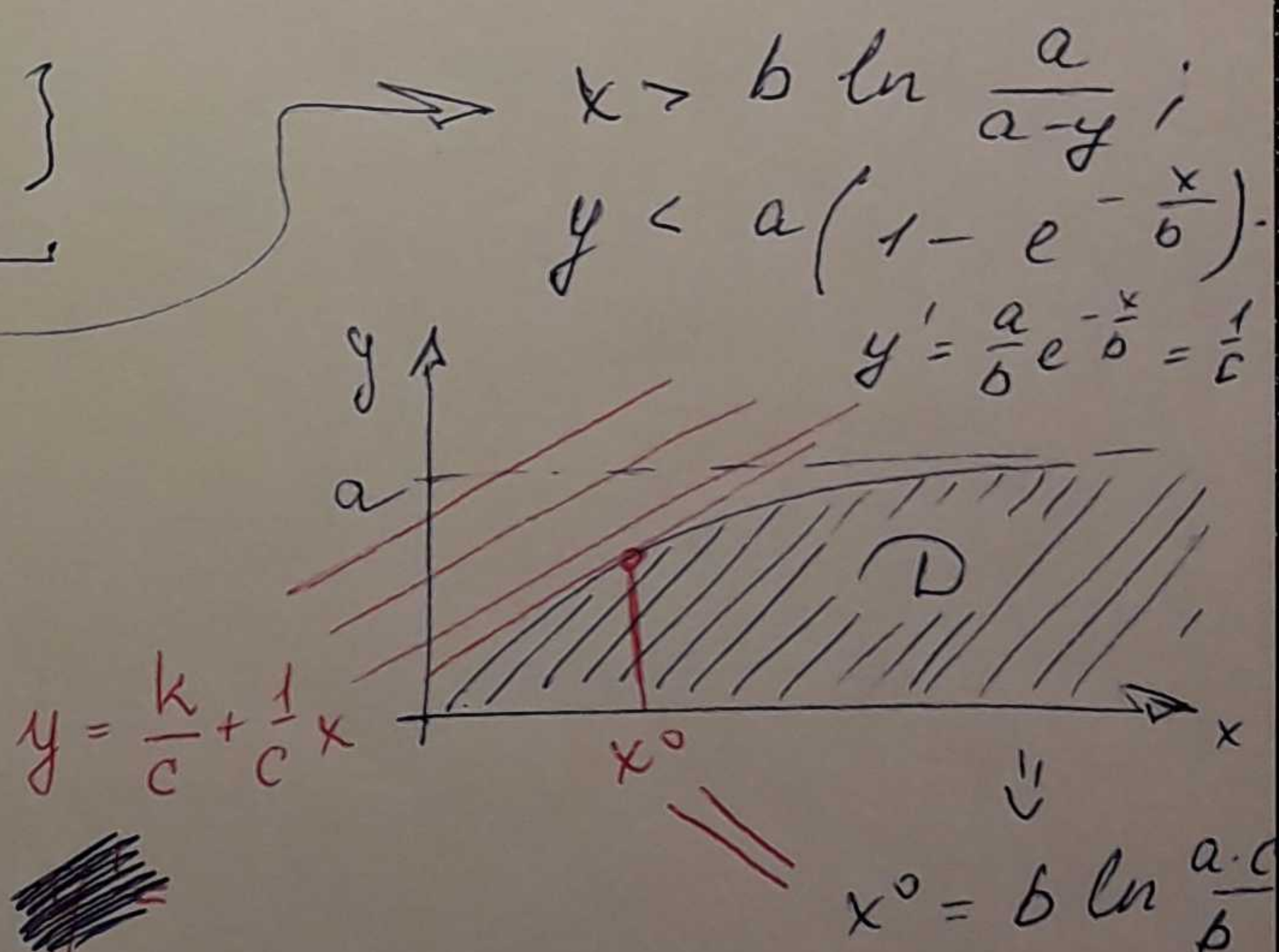
~~$$y = a(1 - e^{-\frac{x}{b}})$$~~

$$y^\varepsilon = a - \frac{b}{c};$$

$$x^\varepsilon = b \ln \frac{ac}{b} + \alpha \varepsilon.$$

$$f(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon; \\ 0, & y \neq y^\varepsilon. \end{cases}$$

В этом случае почти все перераспределение ресурсов идет на выигрыш первого игрока.



Пример 11.1 (Γ_3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Играция, Фирма.
Продвигание иерархический
игр.
Начало игр инициализация.

Теория игр
19.11.20

к.р. игра с выигрышами ($N, 2$)

А, нет, тут пусто.

Упр-е 11.5 (для Γ_3 , добиваемся):

$$F(x, y) = cy - x; G(x, y) = x - b \ln \frac{a}{a-y};$$

$ac > b; X = [0, +\infty); Y = [0, a).$

$$G_3 = \min_x \max_y G(x, y);$$

$y(x) = 0; x^*(y) = 0$. Т.е. просто так производительно работать не выгодно, а нам не выгодно ему платить.

$D^1 = D$, ибо у нас $G_3 = 0$. Тогда и $K = K'$. Поэтому с x^E и y^E будет так, как было в случае до этого (?)

$$x(y) = \begin{cases} x^E, & \tilde{y}(x^E) = y^E; \\ 0, & \tilde{y}(x^E) \neq y^E. \end{cases}$$

Игра Γ_3 имеет особую не имеет.

Упр-е 11.6 Найти равновесие по Уракембергу.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) = 3x/4 + y/2; G(x, y) = (x - y)^2; X = Y = [0, 1].$$

значения равновесия

$$Y(x) = \begin{cases} \{1\}, & x = 1; \\ \{1, 2\}, & x = 2; \\ \{2, 3\}, & x = 3. \end{cases}$$

$$x^0 = 2; y^0 = 1$$

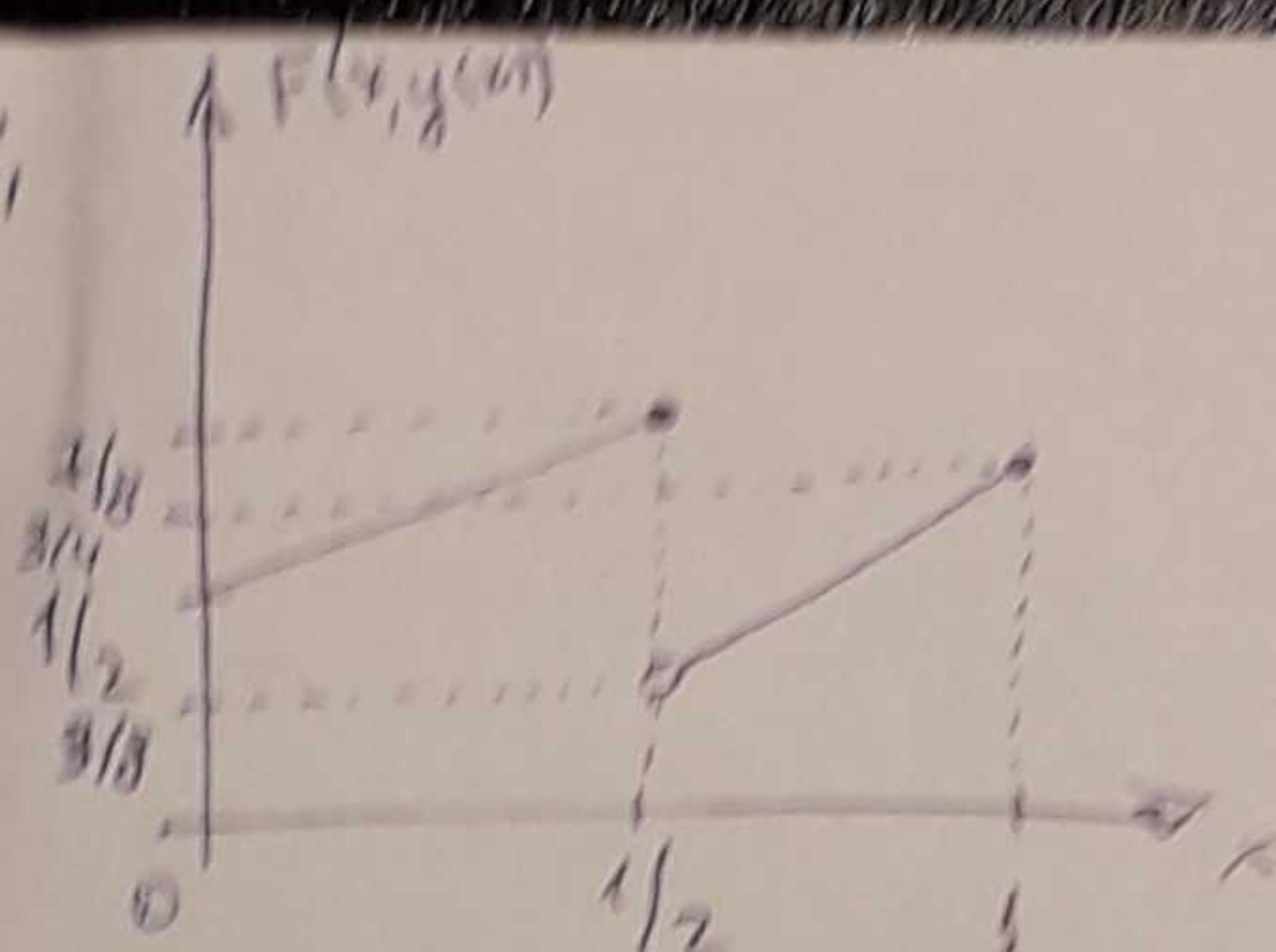
$$Y(x) = \max_y G(x, y) = \begin{cases} \{1\}, & x < 1/2; \\ \{0, 1\}, & x = 1/2; \\ \{0\}, & x > 1/2. \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1/2; \\ 0, & x > 1/2. \end{cases}$$

Тогда $F(x, y(x)) = \dots$

13

$$w = \begin{cases} 3x/4 + 1/2, & x \leq 1/2; \\ 3x/4, & x > 1/2. \end{cases}$$



Ваше равновесие по Максимову требует от игроков сотрудничества. Но последнее не всегда возможно.

Пример 11.1 (две энергии)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$F_5 = \sup_{x \in X} \max_{z \in X} F(z, y);$$

$$y \in \argmin_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

$x=1$
 $x=2$
 $x=3$

$Y(x)$	$y(x)$	z	5
$\{1\}$	1	3	7
$\{1, 2\}$	2	1	6
$\{2, 3\}$	2	1	6

номер i ,
не минимизирует $G(x, y(x))$
по своей $y(x)$

Do того: $F_1 = 3$ (где Γ_1);

$F_2 = 6$;

$F_3 = 4$; но

$F_5 = 7$. !!! - самый лучший вариант

Пример 11.2 (две энергии)

$$X = Y = [0, 1]; \quad F(x, y) = 3x/4 + y/2; \quad G(x, y) = (x - y)^2;$$

x	$Y(x)$	$y(x)$	z	$F(z, y)$
$x < 1/2$	$\{1\}$	1	1	5/4
$x > 1/2$	$\{0\}$	0	1	3/4
$x = 1/2$	$\{0, 1\}$	0	1	3/4

т.е., например, для $x=0, y=1, z=1$.

Сравни с оптимальным игрой.

$F_1 = 7/8$;

$F_2 = 1/8$;

$F_3 = 1$;

$F_5 = 10/8$.

Наравне с игрой.

$\sqrt{2}$

Упр-е 11.5 (две биекции)

$$F(x,y) = cy - x; \quad G(x,y) = x - b \ln \frac{a}{a-y};$$

$$ac > b; \quad X = [0, +\infty); \quad Y = [0, a).$$

$$Y(x) = \{0\}; \quad y(x) = 0.$$

$F(z,0) = -z$. При макс-уме даст 0. $F_5 = 0$, а до этого было

$F_1 = 0; \quad F_2 = F_3 = ac - b - b \ln \frac{c}{b} > 0$. Так что при биекции может ситуация и ухудшиться по сравнению с $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

⚠ В кр. предстоит решить все виды игр: Γ_{1-3}, Γ_5 .

Глава следующая. Игры многих лиц

Здесь равновесие по Нэшу определяется ситуацией, из которой ни одному из игроков индивидуально отклониться не выгодно.

#

Вогнутая функция: $h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') \geq \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z'')$;

Квазивогнутая функция: $h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') \geq \min[h(z'), h(z'')]$.

► $h(z) = z^2$ на $[0,1]$; ► $\uparrow \rightarrow$

##

высчит

Равновесие по Нэшу: $\max_{s^a \in S^a} u^a(\bar{\pi} \| s^a) = u^a(\bar{\pi}) \forall a \in A$;

ука-е для множества: $u^a(\bar{\pi} \| s^a) = u^a(\bar{\pi}) \forall s^a: \bar{\pi}_{s^a}^a > 0$.

Синхронизируем
мр и мнх мнх;
позиционные мнх с
той же информацией.

26.11.20
Теория игр

Пример 12.1

Каждый из 3х игроков, исп. войну из призрачного вооружения, рационального дубля стратегий — оглушать войну (1) или сбрасывать без ослепки (2). $u^x(s)$ — выигрыш пользователя войны. Порог: если мощнейшую войну сбрасываю 2+ игроков, то каждый пользователь имеет убытки в три единицы.

$s^1 \quad s^2 \quad s^3 \quad u^1(s) \quad u^2(s) \quad u^3(s)$

1 1 1 -1 -1 -1

1 1 2 -1 -1 0

1 2 1 -1 0 -1

1 2 2 -4 -3 -3

2 1 1 0 -1 -1

2 1 2 -3 -4 -3

2 2 1 -3 -3 -4

2 2 2 -3 -3 -3

} равновесная ситуация, на всякую

построим либо
все, либо два из
трех игроков

Теперь аккурато:

] $p^1 \sim$ первый использует первую стратегию.
Остальные — по аналогии.

Вер-то ситуации (1, 1, 2), например, — это $p_1 p_2 (1-p_3)$. При суммировании по всем s получим $u^1(p)$. В случае первого:

$$u^1(p) = -p^1 p^2 p^3 - p^1 p^2 (1-p^3) - p^1 (1-p^2) p^3 - 4p^1 (1-p^3) (1-p^3) + 0 - 3[(1-p^1) p^2 (1-p^3) + (1-p^1) (1-p^3) p^3 + (1-p^1) (1-p^3) (1-p^3)] = \text{разделим по } p^1 =$$

$$= p^1 (-6p^2 p^3 + 3p^2 + 3p^3 - 1) + 3p^2 p^3 - 3 = k^1(p^2, p^3) \cdot p^1 + l^1(p^2, p^3).$$

$$\text{Аналогично, получим } k^2(p^1, p^3) = -6p^1 p^3 + 3p^1 + 3p^3 - 1; \quad l^2 = 3p^1 p^3 - 3;$$

$$k^3(p^1, p^2) = -6p^1 p^2 + 3p^1 + 3p^2 - 1; \quad l^3 = 3p^1 p^2 - 3.$$

Начинаем рассматривать варианты:

$$1) \bar{k}^a(\bar{p}) > 0 \Rightarrow \bar{p}^a = 1.$$

$$\bar{\pi} = (\bar{p}^a, a = 1, 2, 3)$$

$$2) \bar{k}^a(\bar{p}) < 0 \Rightarrow \bar{p}^a = 0$$

$$3) \bar{k}^a(\bar{p}) = 0 \Rightarrow \text{нек. значение из } [0, 1],$$

и его надо найти, исходя из стратегий др. игроков.

и так для всех комбинаций?

Покажи: где $\forall i \bar{k}^i(\bar{p}) > 0$ — противоречивый (~~выражение~~) ^{при подстановке} ^{выдает} бред.

Теперь $\bar{k}^1 > 0; \bar{k}^2 > 0; \bar{k}^3 < 0$. Это $(1, 1, 0)$. Подставим в выра-

жение где $\bar{k}^i$: все справедливо $\Rightarrow$ это ситуация равновесия.

Симметрично, к ситуации равновесия отнесем $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$.

$\bar{k}^1 > 0; \bar{k}^2 < 0; \bar{k}^3 < 0$. Это $(1, 0, 0)$. Противоречие сразу из $\bar{k}^1$.

Такая же ситуация где $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$.

Итак, $\bar{k}^i < 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$. Это равновесие — это тоже с.р. (ситуация равновесия).

Теперь будем иметь дело с $\bar{k}^i = 0$.

$$\bar{k}^i = 0: \text{ решаем } \begin{cases} -6p^2p^3 + 3p^2 + 3p^3 - 1 = 0; \\ -6p^1p^3 + 3p^1 + 3p^3 - 1 = 0; \\ -6p^1p^2 + 3p^1 + 3p^2 - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1) - (2):$$

$$(p^3 - 1/2)(p^1 - p^2) = 0.$$

$$a). p^3 = 1/2?$$

при подстан. в (1) получим

$$-3p^2 + 3p^2 + 3/2 - 1 \neq 0.$$

Т.о., а). отбрасываем.

$$\text{Вывод, б): } p^1 = p^2$$

$$-6p^0 \cdot p^0 + 6p^0 - 1 = 0;$$

$$p^0 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \Rightarrow$$

дает две ситуации равновесия (это уже существующие!)

$\bar{k}^1 = 0; \bar{k}^2 = 0; \bar{k}^3 > 0$. Как и в предыдущем случае, получим

$$p^1 = p^2; p^3 = 1 \Rightarrow -6p^0 + 3p^0 + 3 - 1 = 0$$

$$p^0 = 2/3 \Rightarrow \text{Каждый: } (2/3, 2/3, 1). \text{ Остаточное проверить}$$

$$k^3: -6 \cdot \frac{4}{9} + 2 + 2 - 1 > 0.$$

OK.

Новая ситуация равновесия:

$$(2/3, 2/3, 1); (2/3, 1, 2/3); (1, 2/3, 2/3).$$

$$\bar{k}^1 = 0; \bar{k}^2 = 0; \bar{k}^3 < 0;$$

$$p^1 = p^2; 3p^3 - 1 = 0. \text{ Там будет противоречие.}$$

Прозонирование примера 12.1

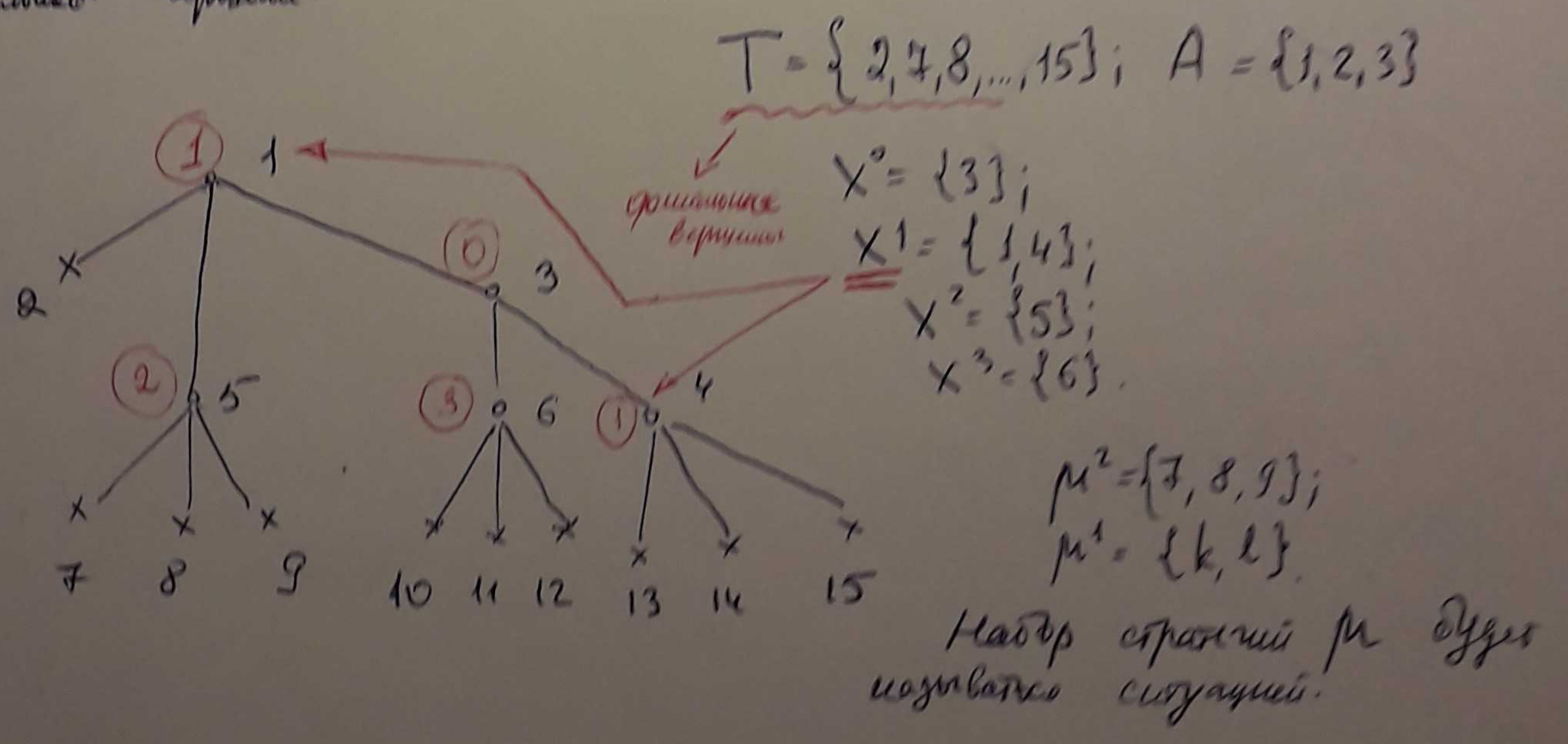
На данный момент рассмотрено 15/27 случаев. Оставшиеся (о точности до симметрии, куда, здесь сильно поможет);

k^1	k^2	k^3			
0	>0	<0	- 1).	}	
0	>0	>0	- 2).		
0	<0	<0	- 3).		
0	<0	>0	- 4).		
				1).	$3-1=0$?! Противоречие;
				2).	$p^2=p^3=1 \Rightarrow -6+3+3-1=0$?! $\sim \sim \sim$;
				3).	$p^2=p^3=0 \Rightarrow -1=0$?! $\sim \sim \sim$;
				4).	$p^2=0; p^3=1 \Rightarrow 3-1=0$?! $\sim \sim \sim$.

Алтого, найдены 4 с.р. в чистых стратегиях (когда все не очищают, одну из очищающих и выигрывает): $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$ и 5 с.р. в смешанных стратегиях: $(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$; $(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6})$, $(2/3, 2/3, 1), (2/3, 1, 2/3), (1, 2/3, 2/3)$.

Пример разбиения для позиц. игр.

Разбиение R определяется, какой игрок (или случай, если $k \in X^0$) ходит в каждой конкретной информационной вершине.

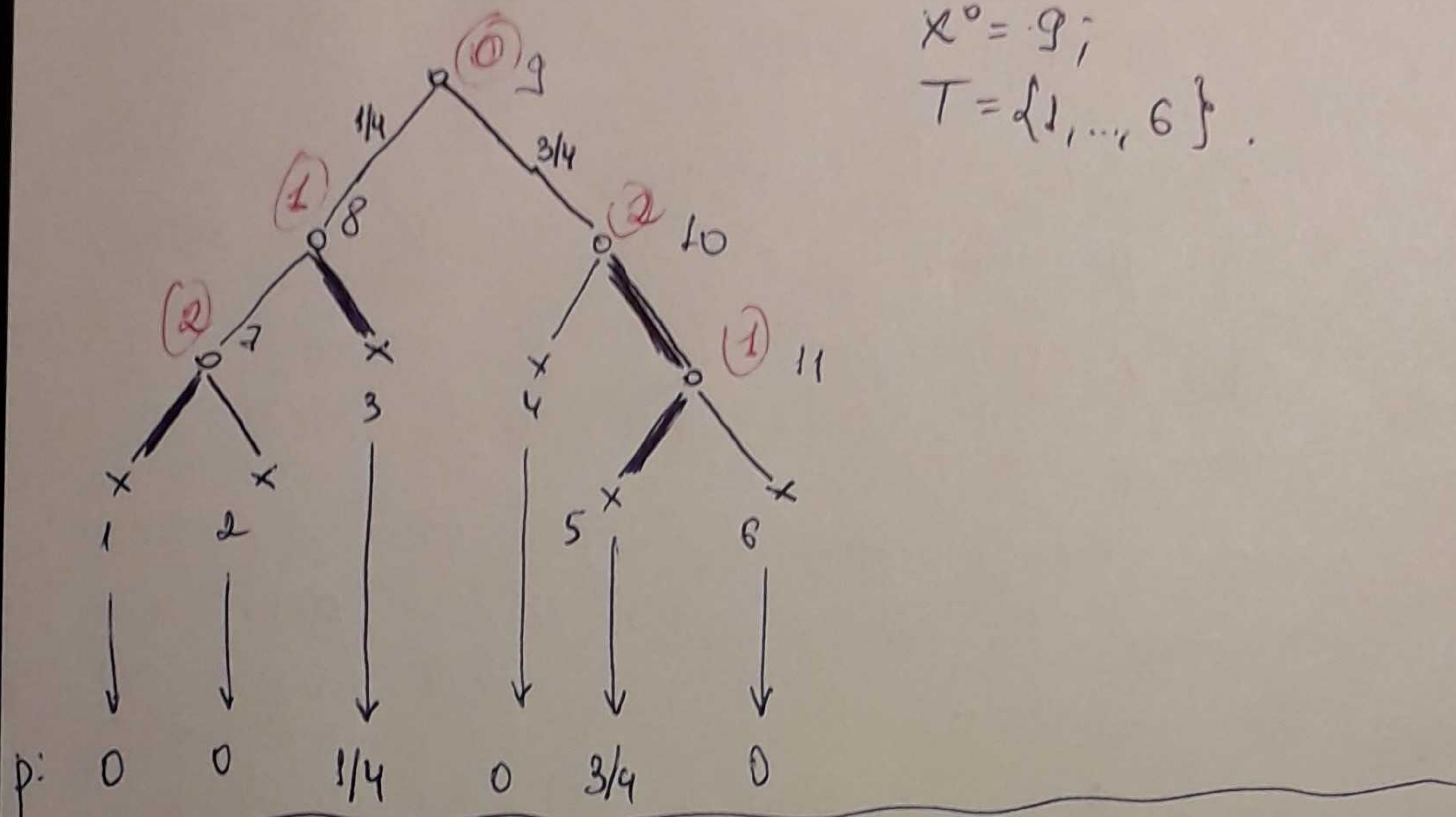


Упражнение 13.1

Разметить ~~дерево~~ ^{узлы} дерева вероятности (для примечных вершин)

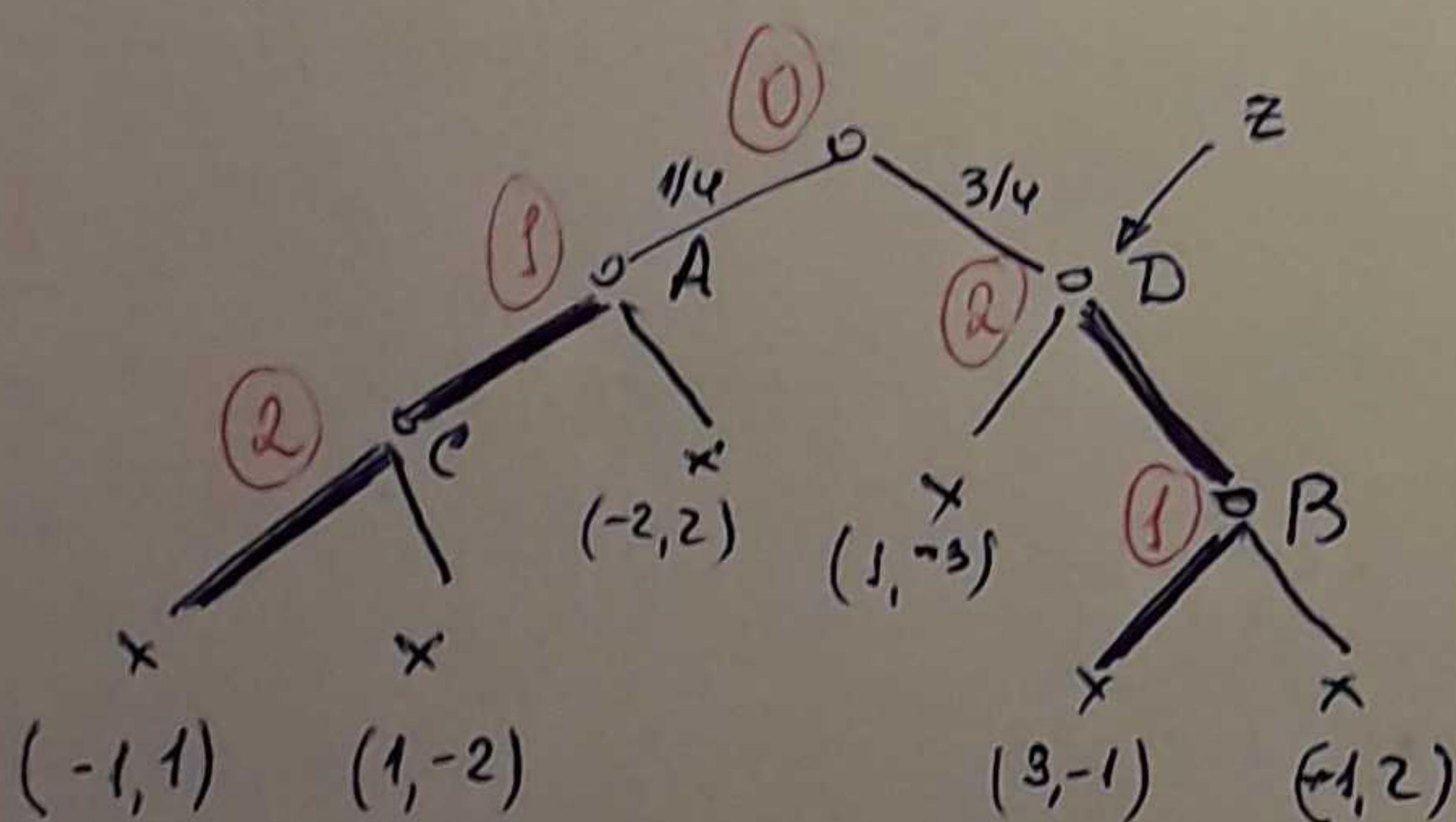
$$X^0 = 9;$$

$$T = \{1, \dots, 6\}.$$



Упр-е 13.2

Преобразовать к нормальной форме:



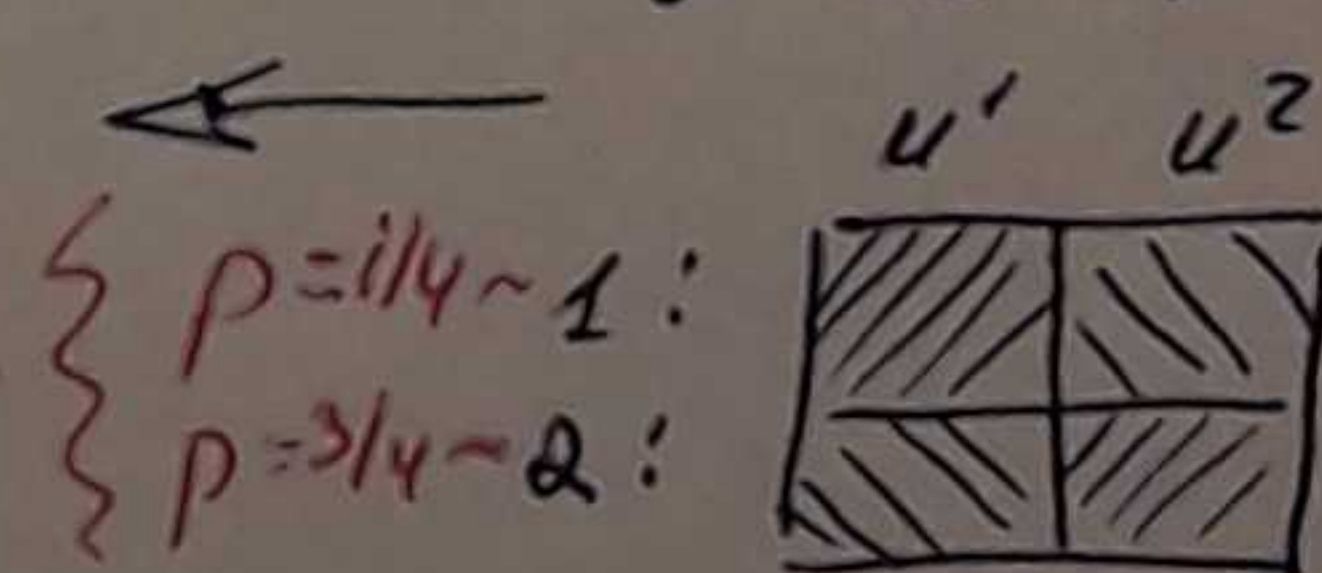
$$\mu^1 \in \{11, 12, 21, 22\} - \text{стр. 1}^{\text{го}} \text{ игрока}$$

$$\mu^2 \in \{11, 12, 21, 22\}$$

Запишем матрицу значений игры для разных комбинаций значений (будем считать, что все как на (*)):

AB \ CD	11	12	21	22
11	-1 1	-1 1	1 -2	1 -2
12	1 -3	3 -1	1 -3	3 -1
21	-1 1	-1 1	1 -2	1 -2
22	1 -3	3 -1	1 -3	3 -1

Ячейка:



Напр., везде, где

$$D=1, \text{ будет } (1, -3)$$

Прежде, чем записать матрицу значений, в ячейках пишем новую м-цу A и аналог B (где первое и второе значение соответ-но)

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 1 & 5/2 \\ 1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & 7/4 & 1/4 & 7/4 \\ 1/4 & -5/4 & 1/4 & -5/4 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1/2 & -11/4 & -5/4 \\ -2 & 7/4 & -11/4 & 1 \\ -7/4 & -1/4 & -7/4 & -1/4 \\ -7/4 & 1/2 & -7/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

[max] ↓ ↓ ↓

Пересчет max'ов в позиции (1, 2) - обозначим типично на дереве: 101: 11, 201: 12.

[max] →

Пример Упр. 13.2 (продолжение)

На основании левого верхнего уха (*), который прообразован истоком, составляются матрицы A и B для игры G_2 :

AB \ CD	11		12	
	-1	1	-1	1
11	(1)	(-3)	(3)	(-1)
12	(1)	(-3)	(-1)	(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

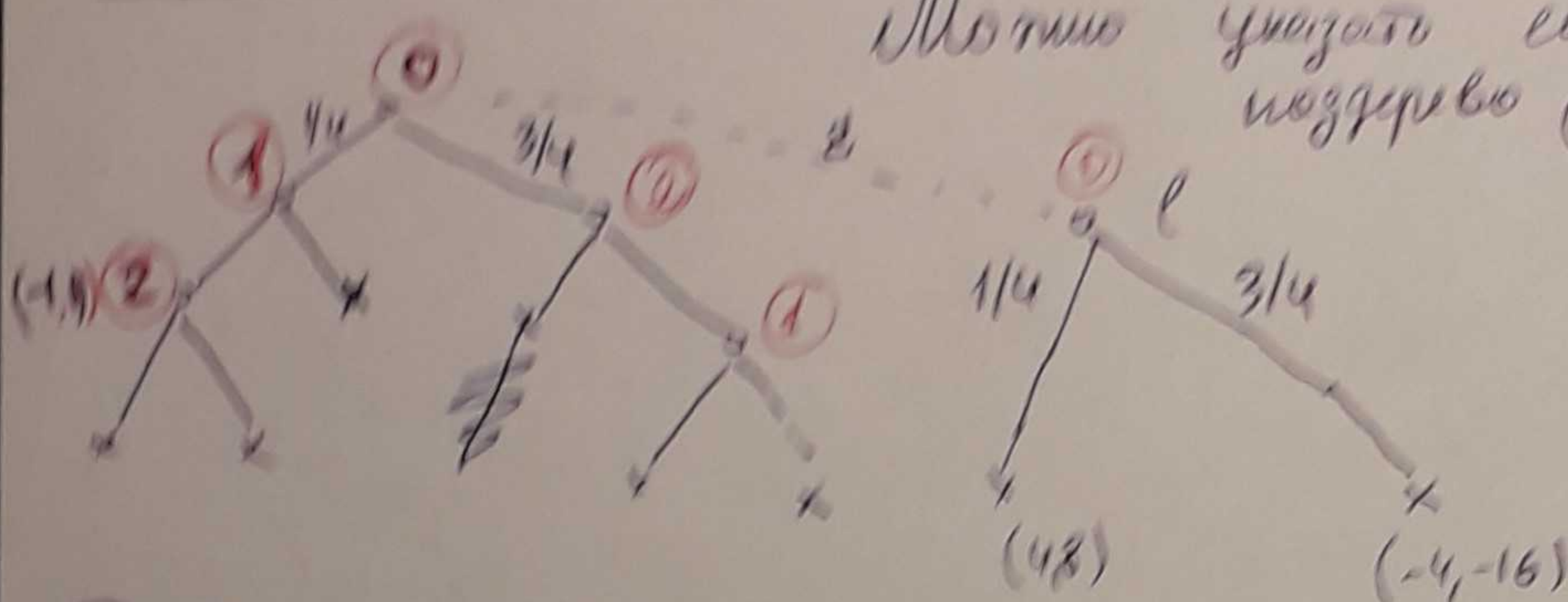
$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 13.2 (не знаю, к чему это)

3.12.20
Теория игр

Можно указать ещё одно
покрытие (с корнем ℓ)

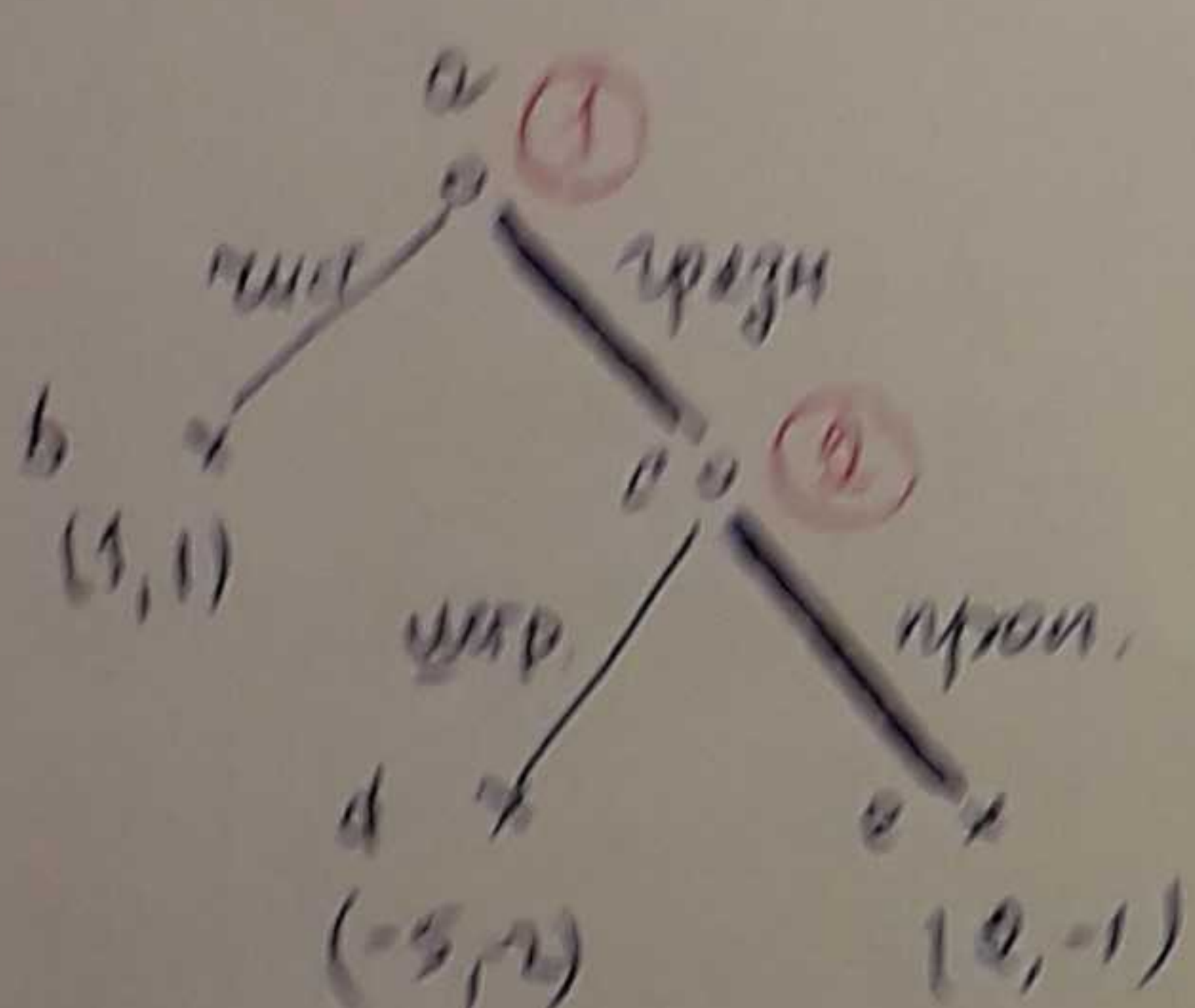
Предположим
исход.



$\ell \in X^0$;

непосредственно, затем

Пример 13.1



$$A = \begin{matrix} & \text{игрок 1} & \text{игрок 2} \\ \text{игрок 1} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{игрок 2} & \end{matrix}; \quad B = \begin{matrix} & \text{игрок 1} & \text{игрок 2} \\ \text{игрок 1} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{игрок 2} & \end{matrix}$$

Рассмотрим с использованием анализа Куна:

$Z^1 = \{c\}$; у вершины с выигрышем (2, -1)
- ибо 2-ой выберет альтернативу
 $c \text{ (1)} > (-2)$.

$Z^2 = \{a\} = \{x^0\} \Rightarrow$ где a будет
точка (2, -1).

Затем можно в норм. форме:

В игре B можно по простому доминированию вычеркнуть
первый столбец (соотв., в первой игре тоже). После этого вы-
черкнем первую строку в A. Тогда ситуация равновесия бу-
дет в (2, 2).

Финал равновесия, найденных ответов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

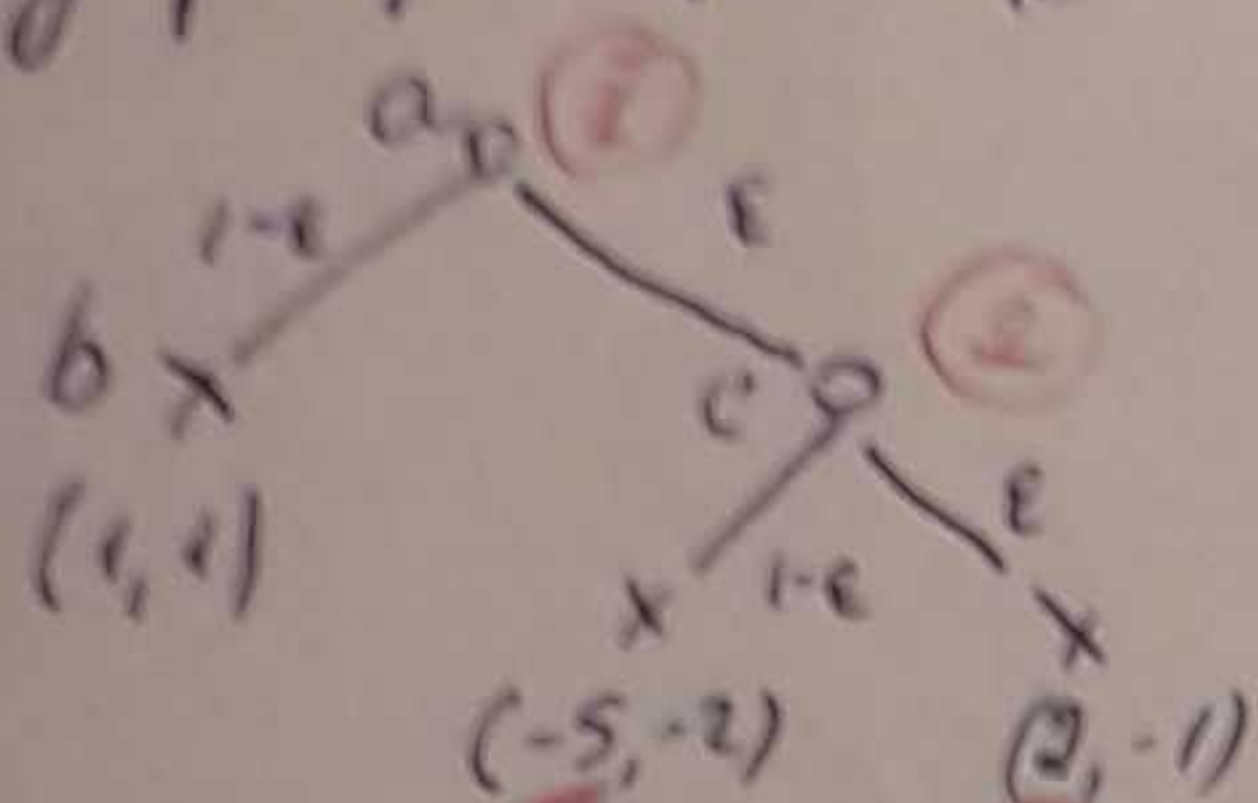
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

лучшие ответы на
ходы другого
игрока

Т.о., (1, 1) - точка ситуации равновесия, но не обязательно совершен-
ным подигровым равновесием.

Возникающие игры G ; в которых позиция игрока определяется
о верном с (обрат. G_2).

Возвращаясь к примеру 13.1 в контексте $\mathcal{G}_\varepsilon$:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\neq \mu = (1, 1)$. В вершине c:

$$\begin{cases} -5(1-\varepsilon) + 2\varepsilon = -5 + 7\varepsilon; \\ -2(1-\varepsilon) - \varepsilon = -2 + \varepsilon \end{cases}$$

стратегии

a:

$$\begin{cases} 1-\varepsilon + \varepsilon(-5+7\varepsilon) = 1-6\varepsilon; \\ 1-\varepsilon - \varepsilon(-2+\varepsilon) = 1-3\varepsilon \end{cases}$$

Запишем матрицу и-чч:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1-6\varepsilon & 1+\varepsilon \\ -5+13\varepsilon & 2-8\varepsilon \end{pmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1-3\varepsilon & 1-2\varepsilon \\ -2+4\varepsilon & -1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

— обведем найденные ответы на стратегии игрока.

Теперь $\neq \mu = (1, 2)$. Тогда

В c:

$$\begin{cases} 2-7\varepsilon; \\ -1-\varepsilon. \end{cases}$$

a:

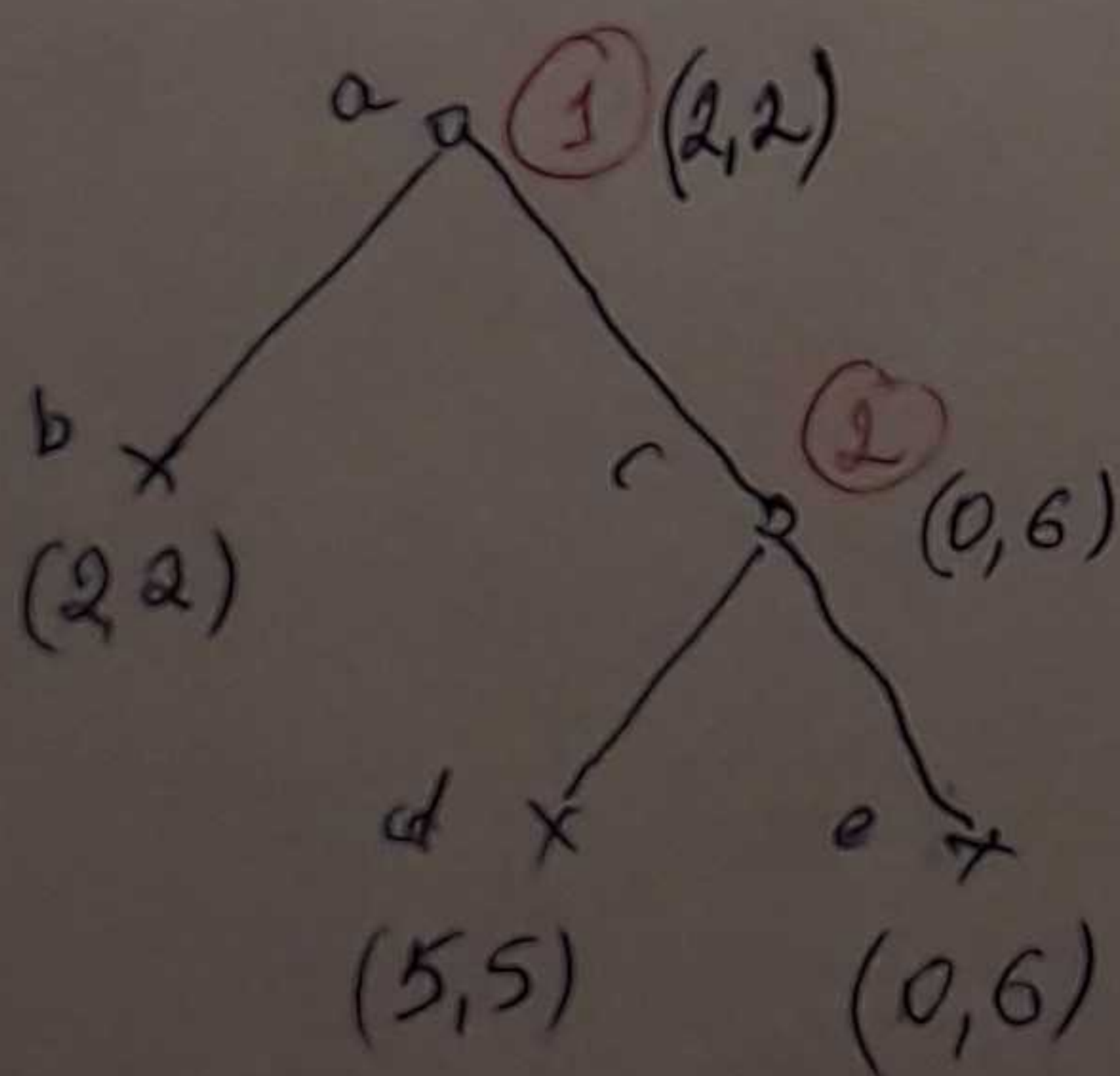
$$\begin{cases} 1+\varepsilon; \\ 1-2\varepsilon. \end{cases}$$

⇓
остаток только совершившее подыгровое равновесие в $\mu = (2, 2)$.

Остальные и-ты возникающих и-ч аналогично запишем.

$$a^{(3,1)}: (-5+13\varepsilon); (-2+4\varepsilon)$$

$$a^{(2,2)}: (2-8\varepsilon); (-1+\varepsilon).$$



и-з ант.и Купа разлагает выигрыши на c, a — (2, 2) — р-тат соверш. подыгрового равновесия. Но есть (5, 5)! Запишем и-чч выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ситуация равновесия в (1, 2).

(5, 5) — выигрыш получается только в случае неустойчивой ситуации.

Позиционная игра облучо вара (с неполной информацией)

Информационное мн-во = сов-то состояний позиц. игры, к-рые игрок не различает м-ду собой. В такой конфигурации чистой стратегией будет отображение информационного мн-ва на мн-во альтернатив. Набор таких стратегий будет ситуацией.